Géométrie

1. Repères de l'espace, coordonnées

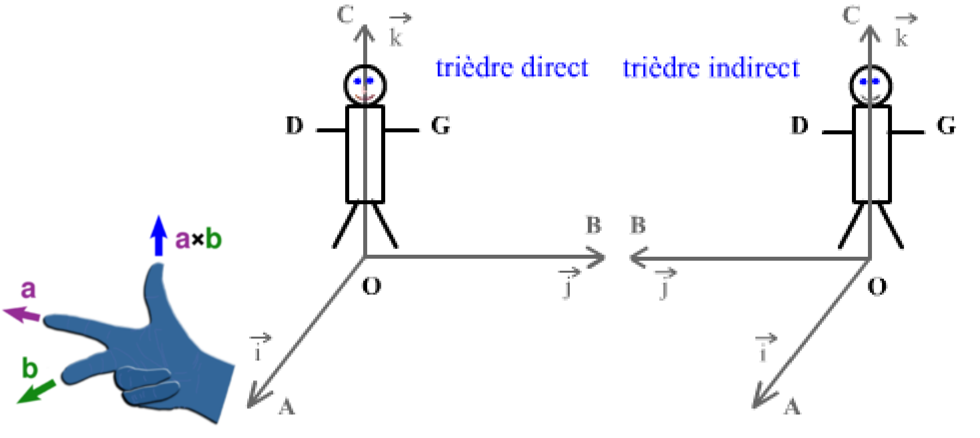
Définitions

Soient un point O et trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

Alors : $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de l'espace ;
O est l'origine du repère ;
$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthogonale ssi les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.
La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormale ssi la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthogonale et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.
La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée ssi elle est orthonormale.
La base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ peut être directe ou indirecte.

Le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthogonal ssi la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthogonale.
Le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormal ssi la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormale.
Le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormé ssi la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée.
Le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est direct ssi la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormale directe.
Le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est indirect ssi la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormale indirecte.



Propriété admise

Soit une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Alors : $x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$.

Définitions

Soit M un point du plan. Alors :

M a pour coordonnées $(x; y; z)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ssi $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.

On écrit $M(x; y; z)$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Alors :

$\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ssi $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.

On écrit $\vec{u}(x; y; z)$.

Propriétés

Soit une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

- $\vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $si \begin{cases} \vec{u}(x; y; z) \\ \vec{v}(x'; y'; z') \end{cases} alors \quad \vec{u} = \vec{v} \;\; ssi \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

  $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$

  $si\ k \in \mathbb{R}\ alors \quad k\,\vec{u}\begin{pmatrix} k\,x \\ k\,y \\ k\,z \end{pmatrix}$

Soit un repère du plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- $si \begin{cases} M(x; y; z) \\ M'(x'; y'; z') \end{cases} alors \quad M = M' \;\; ssi \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$
- $si\ A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}\ et\ B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}\ alors \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

  le point I est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \\ \frac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = 0\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + 0\,\vec{k}$

$\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

c.q.f.d.

$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

c.q.f.d.

$\vec{u} + \vec{v} = \left(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\right) + \left(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}\right) = (x + x')\vec{\imath} + (y + y')\,\vec{\jmath} + (z + z')\,\vec{k}$

$\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$

c.q.f.d.

$k\vec{u} = k\left(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\right) = k\,x\,\vec{\imath} + k\,y\,\vec{\jmath} + k\,z\,\vec{k}$

$k\,\vec{u}\begin{pmatrix} k\,x \\ k\,y \\ k\,z \end{pmatrix}$

c.q.f.d.

$M = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

$\overrightarrow{OM'} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

$M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

c.q.f.d.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = \left(x_B\,\vec{\imath} + y_B\,\vec{\jmath} + z_B\,\vec{k}\right) - \left(x_A\,\vec{\imath} + y_A\,\vec{\jmath} + z_A\,\vec{k}\right) = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\,\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

c.q.f.d.

I est le milieu de $[AB]$ ssi $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$

ssi $\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OI}$

ssi $-\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OI}$

ssi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OI}$

ssi $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x_A\,\vec{\imath} + y_A\,\vec{\jmath} + z_A\,\vec{k}\right) + \left(x_B\,\vec{\imath} + y_B\,\vec{\jmath} + z_B\,\vec{k}\right)\right)$$
$$= \frac{x_A + x_B}{2}\vec{\imath} + \frac{y_A + y_B}{2}\vec{\jmath} + \frac{z_A + z_B}{2}\vec{k}$$

I est le milieu de $[AB]$ ssi $\overrightarrow{OI} = \frac{x_A+x_B}{2}\vec{\imath} + \frac{y_A+y_B}{2}\vec{\jmath} + \frac{z_A+z_B}{2}\vec{k}$

ssi $I\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$

c.q.f.d.

Propriétés

Soit une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

- $si \begin{cases} \vec{u}(x; y; z) \\ \vec{v}(x'; y'; z') \end{cases} \ alors$ $\quad \vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Soit un repère orthonormal du plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

- $si\ A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}\ et\ B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}\ alors\quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Démonstrations

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} &= (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}).(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}) \\
&= (x\,\vec{\imath}.x'\,\vec{\imath}) + (x\,\vec{\imath}.y'\,\vec{\jmath}) + (y\,\vec{\jmath}.x'\,\vec{\imath}) + (y\,\vec{\jmath}.y'\,\vec{\jmath}) \\
&\qquad + (x\,\vec{\imath}.z'\,\vec{k}) + (y\,\vec{\jmath}.z'\,\vec{k}) + (z\,\vec{k}.x'\,\vec{\imath}) + (z\,\vec{k}.y'\,\vec{\jmath}) + (z\,\vec{k}.z'\,\vec{k}) \\
&= x\,x'(\vec{\imath}.\vec{\imath}) + x\,y'(\vec{\imath}.\vec{\jmath}) + y\,x'(\vec{\jmath}.\vec{\imath}) + y\,y'(\vec{\jmath}.\vec{\jmath}) \\
&\qquad + x\,z'(\vec{\imath}.\vec{k}) + y\,z'(\vec{\jmath}.\vec{k}) + z\,x'(\vec{k}.\vec{\imath}) + z\,y'(\vec{k}.\vec{\jmath}) + z\,z'(\vec{k}.\vec{k}) \\
&= x\,x'\|\vec{\imath}\|^2 + x\,y'0 + y\,x'0 + y\,y'\|\vec{\jmath}\|^2 \\
&\qquad + x\,z'0 + y\,z'0 + z\,x'0 + z\,y'0 + z\,z'\|\vec{k}\|^2 \\
&= x\,x' + y\,y' + z\,z'
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x\,x + y\,y + z\,z} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c.q.f.d.

$Si\ A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}\ et\ B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}\ alors\quad AB = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$

c.q.f.d.

2. Le produit vectoriel

Définition

Soit E, un espace vectoriel de dimension 3.
Soit $\wedge : E \times E \to E$ telle que

- $\wedge$ est une application bilinéaire, c'est-à-dire respectant la condition suivante :
  Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ :
  $$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$
  $$(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$$
  $$(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$
- Pour tout $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:
  1. Règle d'échange : $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$
  2. Formule du double produit : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de dimension 3.
$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 &= \sqrt{(\vec{u} \wedge \vec{v}).(\vec{u} \wedge \vec{v})}^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v}).(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\
&= \vec{u}.\big(\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})\big) && \text{par le règle d'échange} \\
&= \vec{u}.\big((\vec{v}.\vec{v})\vec{u} - (\vec{v}.\vec{u})\vec{v}\big) && \text{par la formule du double produit} \\
&= \vec{u}.(\vec{v}^2\vec{u} - (\vec{v}.\vec{u})\vec{v}) \\
&= \vec{v}^2\vec{u}^2 - (\vec{v}.\vec{u})(\vec{u}.\vec{v}) \\
&= \vec{u}^2\vec{v}^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2
\end{aligned}$$

CQFD

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de dimension 3.

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ colinéaires$

Démonstration

On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

$|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \quad ssi \quad \vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ colinéaires.$

Démonstration

Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

alors $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

$\vec{0}^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

$0 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

$(\vec{u}.\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$

$|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

$\vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ colinéaires$.

Si $\vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ colinéaires$

alors $|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

$(\vec{u}.\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$

$0 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = 0$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

CQFD

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de dimension 3.

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$

Démonstration

$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = 0$

$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} + \vec{v}) \quad = \vec{u} \wedge \vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{v}$

$= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{u}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{u} = 0$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$

CQFD

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de dimension 3.

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

Démonstration

$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{v} = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{v}) = \vec{u}.\vec{0} = 0$

$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{u} = \big(-(\vec{v} \wedge \vec{u})\big).\vec{u} = -\big((\vec{v} \wedge \vec{u}).\vec{u}\big) = -\big(\vec{v}.(\vec{u} \wedge \vec{u})\big) = -\big(\vec{v}.\vec{0}\big) = 0$

CQFD

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de dimension 3 tels que $\vec{v} \neq \vec{0}$.
Soit $\overrightarrow{u'}$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.
Alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\vec{u} - \overrightarrow{u'}\right) \wedge \vec{v}$.

Démonstration

$$\left(\vec{u} - \overrightarrow{u'}\right) \wedge \vec{v} = \left(\vec{u} - \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} - \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

CQFD

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de dimension 3 tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
Alors, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\left(\angle(\vec{u}, \vec{u})\right)$

Démonstration

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \left\|\left(\vec{u} - \overrightarrow{u'}\right) \wedge \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u} - \overrightarrow{u'}\right\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \left(\left(\vec{u} - \overrightarrow{u'}\right).\vec{v}\right)^2 = \left\|\vec{u} - \overrightarrow{u'}\right\|^2 \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \left(\|\vec{u}\| \sin\left(\angle(\vec{u}, \vec{v})\right)\right)^2 \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\left(\angle(\vec{u}, \vec{u})\right)$$

CQFD

Propriété

Soient $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs normé orthogonaux de dimension 3.
Soit $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$.
Alors, la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est orthonormale
$\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$.

Démonstration

$\|\overrightarrow{e_3}\| = \|\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}\| = \|\overrightarrow{e_1}\|\|\overrightarrow{e_2}\| \sin\big(\angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})\big) = 1.1. \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\overrightarrow{e_3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{e_2}$
Donc, la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est orthonormale.

$\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_2} \wedge (\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}) = (\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_1} - (\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_2} = (\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = (-\overrightarrow{e_1}) \wedge \overrightarrow{e_3} = (-\overrightarrow{e_1}) \wedge (\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}) = \big((-\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_2}\big)\overrightarrow{e_1} - \big((-\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}\big)\overrightarrow{e_2} = -\big((-\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}\big)\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}$
CQFD

Propriété

Soient $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs normé orthogonaux de dimension 3.
Soit $\overrightarrow{e_3} = -(\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2})$.
Alors, la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est orthonormale
$-(\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1}$
$-(\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_2}$.

Démonstration

$\|\overrightarrow{e_3}\| = \|-(\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2})\| = \|\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}\| = 1$
$\overrightarrow{e_3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{e_2}$
Donc, la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est orthonormale.

$-(\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3}) = -\big(\overrightarrow{e_2} \wedge -(\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2})\big) = \overrightarrow{e_2} \wedge (\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1}$
$-(\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1}) = -\big((-\overrightarrow{e_1}) \wedge \overrightarrow{e_3}\big) = -\Big((-\overrightarrow{e_1}) \wedge \big(-(\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2})\big)\Big) = (-\overrightarrow{e_1}) \wedge (\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2}$
CQFD

Définition

$\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ **un repère orthonormé direct**

ssi

$\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ **un repère orthonormé** **et** $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k}$.

$\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ **un repère orthonormé indirect**

ssi

$\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ **un repère orthonormé** **et** $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=-\vec{k}$.

Propriété

Soient $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe.
Soient (x,y,z) les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans cette base.
Soient (x',y',z') les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans cette base.
Alors les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans cette base sont : $(y\,z'-z\,y';zx'-x\,z';x\,y'-y\,x')$.
Si la base est orthonormale indirecte, les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont

$$-(y\,z'-z\,y';zx'-x\,z';x\,y'-y\,x').$$

Démonstration

$\vec{u}=x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}+z\,\vec{k}$

$\vec{v}=x'\,\vec{\imath}+y'\,\vec{\jmath}+z'\,\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= \left(x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}+z\,\vec{k}\right)\wedge\left(x'\,\vec{\imath}+y'\,\vec{\jmath}+z'\,\vec{k}\right)\\
&= xx'(\vec{\imath}\wedge\vec{\imath})+xy'(\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath})+xz'\left(\vec{\imath}\wedge\vec{k}\right)+yx'(\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath})+yy'(\vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath})+yz'\left(\vec{\jmath}\wedge\vec{k}\right)\\
&\qquad +zx'\left(\vec{k}\wedge\vec{\imath}\right)+zy'\left(\vec{k}\wedge\vec{\jmath}\right)+zz'\left(\vec{k}\wedge\vec{k}\right)\\
&= xy'(\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath})+xz'\left(\vec{\imath}\wedge\vec{k}\right)+yx'(\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath})+yz'\left(\vec{\jmath}\wedge\vec{k}\right)+zx'\left(\vec{k}\wedge\vec{\imath}\right)+zy'\left(\vec{k}\wedge\vec{\jmath}\right)\\
&= (yz'-zy')\left(\vec{\jmath}\wedge\vec{k}\right)-(xz'-zx')\left(\vec{k}\wedge\vec{\imath}\right)+(xy'-yx')(\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath})\\
&= (yz'-zy')\left(\vec{\jmath}\wedge\vec{k}\right)+(zx'-xz')\left(\vec{k}\wedge\vec{\imath}\right)+(xy'-yx')(\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}).\end{aligned}$$

Si la base est directe:

$\vec{u}\wedge\vec{v}=(yz'-zy')\vec{\imath}+(zx'-xz')\vec{\jmath}+(xy'-yx')\vec{k}.$

Si la base est indirecte:

$\vec{u}\wedge\vec{v}=-(yz'-zy')\vec{\imath}-(zx'-xz')\vec{\jmath}-(xy'-yx')\vec{k}.$

CQFD

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de dimension 3.
Soit r_x la rotation d'axe $(O,\vec{\imath})$ et d'angle γ.
Soit r_y la rotation d'axe $(O,\vec{\jmath})$ et d'angle γ.
Soit r_z la rotation d'axe $(O,\vec{k})$ et d'angle γ.
Alors :

$$r_x(\vec{u}\wedge\vec{v}) = r_x(\vec{u})\wedge r_x(\vec{v})$$
$$r_y(\vec{u}\wedge\vec{v}) = r_y(\vec{u})\wedge r_y(\vec{v})$$
$$r_z(\vec{u}\wedge\vec{v}) = r_z(\vec{u})\wedge r_z(\vec{v}).$$

Démonstration

Soient $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormal direct.
Soient (x,y,z) les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère.
Soient (x',y',z') les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans ce repère.

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix}$$

$$r_x(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz'-zy' \\ (zx'-xz')\cos\gamma-(xy'-yx')\sin\gamma \\ (zx'-xz')\sin\gamma+(xy'-yx')\cos\gamma\,' \end{pmatrix}$$

$$r_x(\vec{u})\wedge r_x(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$r_x(\vec{u})\wedge r_x(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\gamma-z\sin\gamma \\ y\sin\gamma+z\cos\gamma \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} x' \\ y'\cos\gamma-z'\sin\gamma \\ y'\sin\gamma+z'\cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$r_x(\vec{u})\wedge r_x(\vec{v}) = \begin{pmatrix} (y\cos\gamma-z\sin\gamma)(y'\sin\gamma+z'\cos\gamma)-(y\sin\gamma+z\cos\gamma)(y'\cos\gamma-z'\sin\gamma) \\ (y\sin\gamma+z\cos\gamma)x'-x(y'\sin\gamma+z'\cos\gamma) \\ x(y'\cos\gamma-z'\sin\gamma)-(y\cos\gamma-z\sin\gamma)x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} yy'\cos\gamma\sin\gamma+yz'\cos^2\gamma-zy'\sin^2\gamma-zz'\sin\gamma\cos\gamma-yy'\sin\gamma\cos\gamma+yz'\sin^2\gamma-zy'\cos^2\gamma+zz'\sin\gamma\cos\gamma \\ (y\sin\gamma+z\cos\gamma)x'-x(y'\sin\gamma+z'\cos\gamma) \\ x(y'\cos\gamma-z'\sin\gamma)-(y\cos\gamma-z\sin\gamma)x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} yz'\cos^2\gamma-zy'\sin^2\gamma+yz'\sin^2\gamma-zy'\cos^2\gamma \\ (y\sin\gamma+z\cos\gamma)x'-x(y'\sin\gamma+z'\cos\gamma) \\ x(y'\cos\gamma-z'\sin\gamma)-(y\cos\gamma-z\sin\gamma)x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} yz'-zy' \\ (y\sin\gamma+z\cos\gamma)x'-x(y'\sin\gamma+z'\cos\gamma) \\ x(y'\cos\gamma-z'\sin\gamma)-(y\cos\gamma-z\sin\gamma)x' \end{pmatrix}$$

$$r_x(\vec{u}\wedge\vec{v}) = r_x(\vec{u})\wedge r_x(\vec{v})$$

$$r_z(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (yz' - zy')\cos\gamma + (xy' - yx')\sin\gamma \\ zx' - xz' \\ -(yz' - zy')\sin\gamma + (xy' - yx')\cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$r_y(\vec{u}) \wedge r_y(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$r_y(\vec{u}) \wedge r_y(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x\cos\gamma + z\sin\gamma \\ y \\ -x\sin\gamma + z\cos\gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x'\cos\gamma + z'\sin\gamma \\ y' \\ -x'\sin\gamma + z'\cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$r_y(\vec{u}) \wedge r_y(\vec{v}) = \begin{pmatrix} y(-x'\sin\gamma + z'\cos\gamma) - (-x\sin\gamma + z\cos\gamma)y' \\ (-x\sin\gamma + z\cos\gamma)(x'\cos\gamma + z'\sin\gamma) - (x\cos\gamma + z\sin\gamma)(-x'\sin\gamma + z'\cos\gamma) \\ (x\cos\gamma + z\sin\gamma)y' - y(x'\cos\gamma + z'\sin\gamma) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y(-x'\sin\gamma + z'\cos\gamma) - (-x\sin\gamma + z\cos\gamma)y' \\ -xx'\cos\gamma\sin\gamma - xz'\sin^2\gamma + zx'\cos^2\gamma + zz'\sin\gamma\cos\gamma + xx'\sin\gamma\cos\gamma - xz'\cos^2\gamma + zx'\sin^2\gamma - zz'\sin\gamma\cos\gamma \\ (x\cos\gamma + z\sin\gamma)y' - y(x'\cos\gamma + z'\sin\gamma) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y(-x'\sin\gamma + z'\cos\gamma) - (-x\sin\gamma + z\cos\gamma)y' \\ -xz'\, sin^2\gamma + zx'\, cos^2\gamma - xz'\, cos^2\gamma + zx'\, sin^2\gamma \\ (x\cos\gamma + z\sin\gamma)y' - y(x'\cos\gamma + z'\sin\gamma) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y(-x'\sin\gamma + z'\cos\gamma) - (-x\sin\gamma + z\cos\gamma)y' \\ -xz' + zx' \\ (x\cos\gamma + z\sin\gamma)y' - y(x'\cos\gamma + z'\sin\gamma) \end{pmatrix}$$

$$r_y(\vec{u} \wedge \vec{v}) = r_y(\vec{u}) \wedge r_y(\vec{v})$$

$$r_z(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (yz' - zy')\cos\gamma - (zx' - xz')\sin\gamma \\ (yz' - zy')\sin\gamma + (zx' - xz')\cos\gamma \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

$$r_z(\vec{u}) \wedge r_z(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$r_z(\vec{u}) \wedge r_z(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x\cos\gamma - y\sin\gamma \\ x\sin\gamma + y\cos\gamma \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x'\cos\gamma - y'\sin\gamma \\ x'\sin\gamma + y'\cos\gamma \\ z' \end{pmatrix}$$

$$r_z(\vec{u}) \wedge r_z(\vec{v}) = \begin{pmatrix} (x\sin\gamma + y\cos\gamma)z' - z(x'\sin\gamma + y'\cos\gamma) \\ z(x'\cos\gamma - y'\sin\gamma) - (x\cos\gamma - y\sin\gamma)z' \\ (x\cos\gamma - y\sin\gamma)(x'\sin\gamma + y'\cos\gamma) - (x\sin\gamma + y\cos\gamma)(x'\cos\gamma - y'\sin\gamma) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x\sin\gamma + y\cos\gamma)z' - z(x'\sin\gamma + y'\cos\gamma) \\ z(x'\cos\gamma - y'\sin\gamma) - (x\cos\gamma - y\sin\gamma)z' \\ xx'\cos\gamma\sin\gamma + xy'\cos^2\gamma - yx'\sin^2\gamma - yy'\sin\gamma\cos\gamma - xx'\sin\gamma\cos\gamma + xy'\sin^2\gamma - yx'\cos^2\gamma + yy'\sin\gamma\cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x\, sin\gamma + y\, cos\gamma)z' - z(x'\, sin\gamma + y'\, cos\gamma) \\ z(x'\, cos\gamma - y'\, sin\gamma) - (x\, cos\gamma - y\, sin\gamma)z' \\ xy'\, cos^2\gamma - yx'\, sin^2\gamma + xy'\, sin^2\gamma - yx'\, cos^2\gamma \end{pmatrix}$$

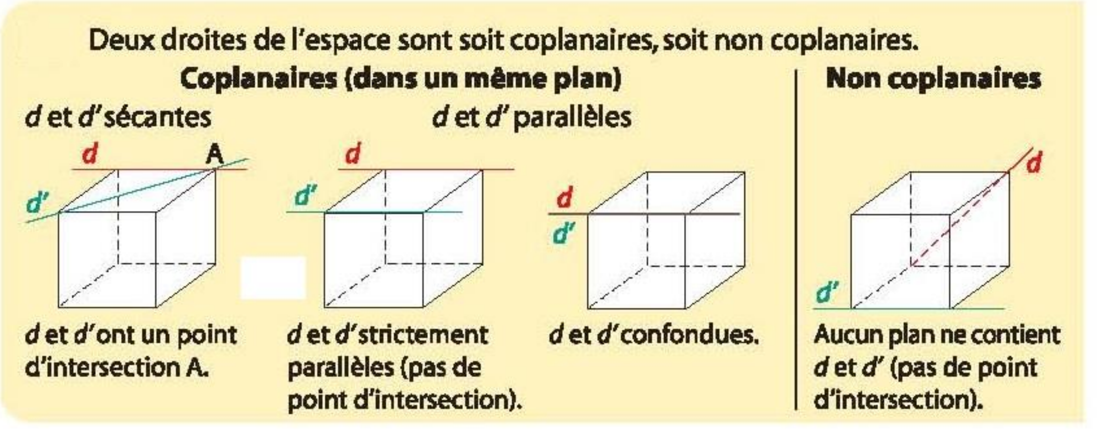
$$= \begin{pmatrix} (x\, sin\gamma + y\, cos\gamma)z' - z(x'\, sin\gamma + y'\, cos\gamma) \\ z(x'\, cos\gamma - y'\, sin\gamma) - (x\, cos\gamma - y\, sin\gamma)z' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

$$r_z(\vec{u} \wedge \vec{v}) = r_z(\vec{u}) \wedge r_z(\vec{v})$$

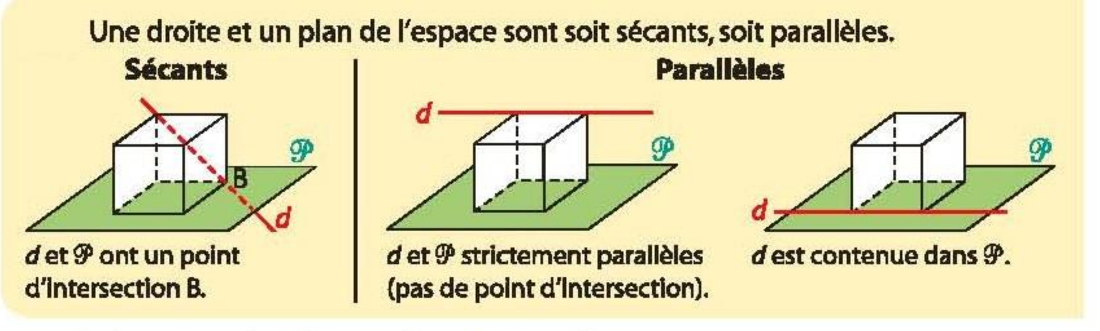
CQFD

3. Positions relatives de droites et de plans

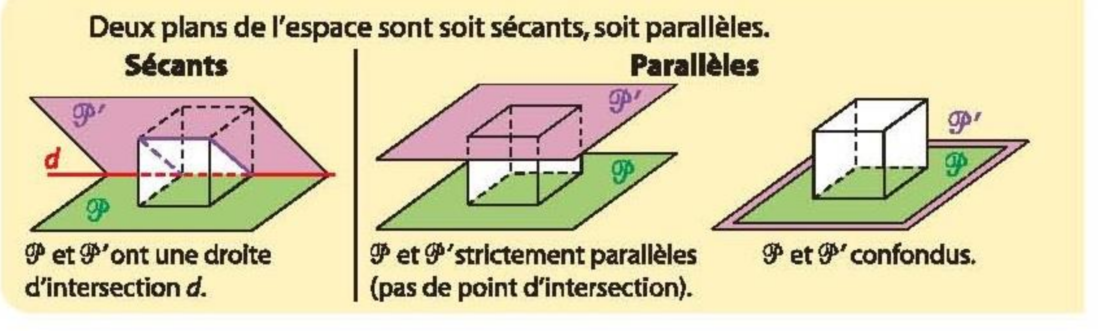
Positions relatives de deux droites



Positions relatives d'une droite et d'un plan

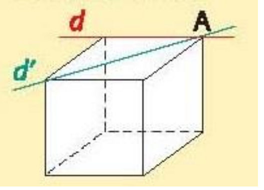
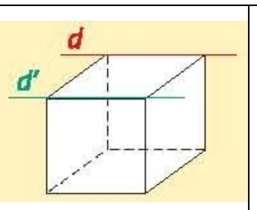
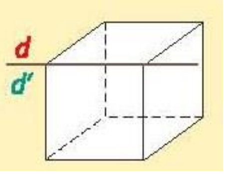
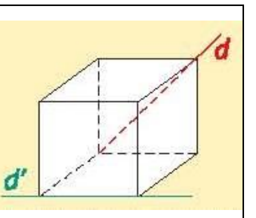


Positions relatives de deux plans



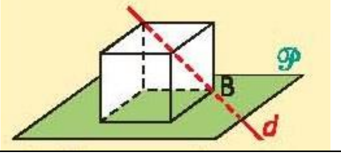
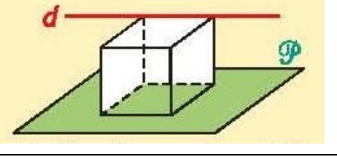
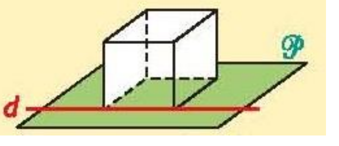
Exercice 1

Compléter le tableau suivant avec les mots Vrai et Faux.

				
(d) et (d') sont coplanaires				
(d) et (d') sont sécantes				
$(d)//(d')$				
(d) est strictement parallèle à (d')				
(d) et (d') sont confondues				
$(d)\cap(d') = \{\,\}$				
$(d)\cap(d') = \{A\}$				
$(d)\cap(d') = (d)$				

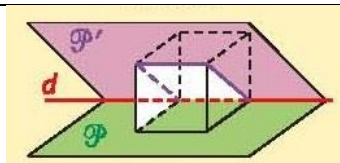
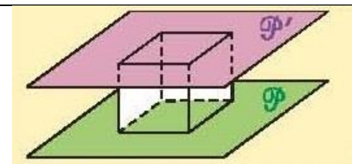
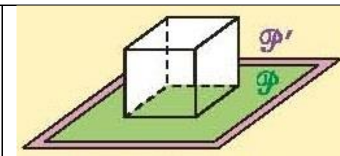
Exercice 2

Compléter le tableau suivant avec les mots Vrai et Faux.

			
(d) **et** $(\mathcal{P})$ **sont sécants**			
$(d)\cap(\mathcal{P}) = \{B\}$			
$(d)//(\mathcal{P})$			
(d) est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$			
$(d)\cap(\mathcal{P}) = \emptyset$			
$(d) \subset (\mathcal{P})$			
$(d)\cap(\mathcal{P}) = (d)$			

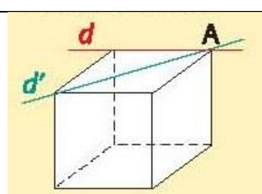
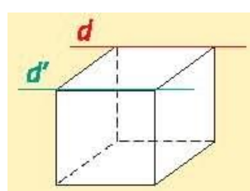
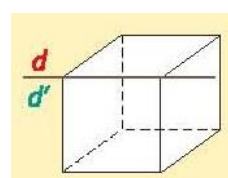
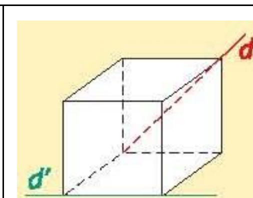
Exercice 3

Compléter le tableau suivant avec les mots Vrai et Faux.

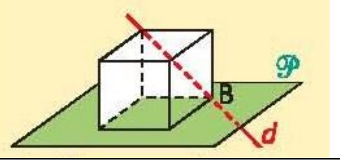
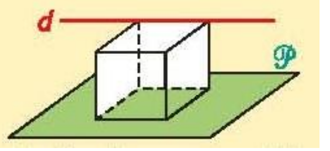
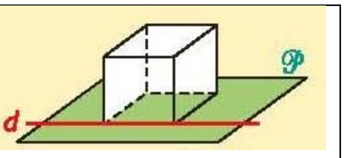
			
$(\mathcal{P})$ **et** $(\mathcal{P}')$ **sont sécants**			
$(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}') = (d)$			
$(\mathcal{P})//(\mathcal{P}')$			
$(\mathcal{P})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P}')$			
$(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}') = \emptyset$			
$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondues			
$(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}') = (\mathcal{P})$			

Solutions des exercices 1 à 3

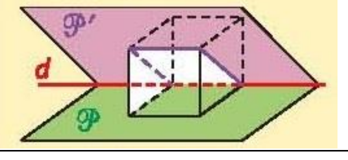
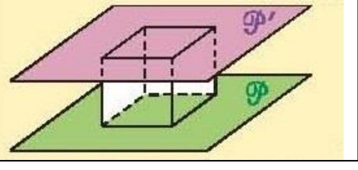
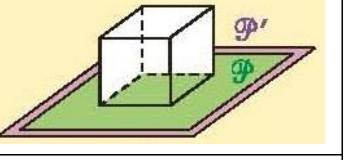
Exercice 1

				
(d) et (d') sont coplanaires	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
(d) et (d') sont sécantes	Vrai	Faux	Faux	Faux
$(d)//(d')$	Faux	Vrai	Vrai	Faux
(d) est strictement parallèle à (d')	Faux	Vrai	Faux	Faux
(d) et (d') sont confondues	Faux	Faux	Vrai	Faux
$(d)\cap(d') = \{\,\}$	Faux	Vrai	Faux	Vrai
$(d)\cap(d') = \{A\}$	Vrai	Faux	Faux	Faux
$(d)\cap(d') = (d)$	Faux	Faux	Vrai	Faux

Exercice 2

			
(d) **et** $(\mathcal{P})$ **sont sécants**	Vrai	Faux	Faux
$(d)\cap(\mathcal{P}) = \{B\}$	Vrai	Faux	Faux
$(d)//(\mathcal{P})$	Faux	Vrai	Vrai
(d) est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$	Faux	Vrai	Faux
$(d)\cap(\mathcal{P}) = \emptyset$	Faux	Vrai	Faux
$(d) \subset (\mathcal{P})$	Faux	Faux	Vrai
$(d)\cap(\mathcal{P}) = (d)$	Faux	Faux	Vrai

Exercice 3

			
$(\mathcal{P})$ **et** $(\mathcal{P}')$ **sont sécants**	Vrai	Faux	Faux
$(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}') = (d)$	Vrai	Faux	Faux
$(\mathcal{P})//(\mathcal{P}')$	Faux	Vrai	Vrai
$(\mathcal{P})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P}')$	Faux	Vrai	Faux
$(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}') = \emptyset$	Faux	Vrai	Faux
$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondues	Faux	Faux	Vrai
$(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}') = (\mathcal{P})$	Faux	Faux	Vrai

4. Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur est normal à un plan
ssi
il n'est pas égal au vecteur nul et il est orthogonal à deux vecteur non colinéaires du plan.

Propriété

Un vecteur normal à un plan est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

Preuve :

Soit un plan $(\mathcal{P})$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan $(\mathcal{P})$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires
$\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux
$\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque du plan $(\mathcal{P})$.
Alors $\vec{w} = k\,\vec{u} + l\,\vec{v}$ pour un réel k et un réel l.
$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(k\,\vec{u} + l\,\vec{v}) = k\,(\vec{n}.\vec{u}) + l(\,\vec{n}.\vec{v}) = k\,0 + l\,0 = 0$
$\vec{w}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
c.q.f.d.

Propriété

Soit un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace. Alors :
Le plan $(\mathcal{P})$ passant par $A\begin{pmatrix}x_A\\ y_A\\ z_A\end{pmatrix}$ et admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ comme vecteur normal a pour équation : $ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0$.
Remarque : On dit que $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.

Preuve :

Soient un point M et des réels x, y et z tels que $M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

$M \in (\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}\,.\vec{n} = 0.$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\ y - y_A\\ z - z_A\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
M \in (\mathcal{P}) \quad &\Leftrightarrow \quad (x - x_A \quad y - y_A \quad z - z_A)\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = 0\\
&\Leftrightarrow \quad a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0\\
&\Leftrightarrow \quad ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0.
\end{aligned}$$

(d): $ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0$.

c.q.f.d.

5. Équation cartésienne d'un plan

Exercice 1 – À faire avec le professeur

Soit un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace. Déterminer une équation cartésienne pour chaque plan suivant.

a) Le plan $(\mathcal{P})$ qui passe par les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\-6\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

b) Le plan $(\mathcal{P})$ qui passe par le point $A\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

c) Le plan $(\mathcal{P})$ qui passe par le point $A\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ et qui est parallèle au plan (OJK) où $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

d) Le plan $(\mathcal{P})$ qui passe par le point $A\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et qui est parallèle au plan d'équation
$$2x + 3y - 4z + 3 = 0.$$

e) Le plan $(\mathcal{P})$ qui passe par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

Exercice 2 (facultatif)

Soit un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace. Déterminer une équation cartésienne pour chaque plan suivant.

a) Le plan $(\mathcal{P})$ qui passe par les points $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$.

b) Le plan $(\mathcal{P})$ qui passe par le point $A\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$.

c) Le plan $(\mathcal{P})$ qui passe par le point $A\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et qui est parallèle au plan (OIJ) où $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$.

Exercice 3 (facultatif)

Soit un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ qui passe par les points $A\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}$.

Solutions des exercices 1 à 3

Exercice 1

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-(1)\\1-(0)\\3-(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\9\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-(1)\\1-(0)\\-1-(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-9\\-\big(-15-(-9)\big)\\-3-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$;

$(\mathcal{P})\colon 2x-3y+z+d=0$; $C\in(\mathcal{P})\Leftrightarrow 2(0)-3(1)+(-1)+d=0\Leftrightarrow d=4$; $(\mathcal{P})\colon 2x-3y+z+4=0$.

b) $(\mathcal{P})\colon 2x-2y+z+6=0$

c) $(\mathcal{P})\colon x+3=0$

d) $(\mathcal{P})\colon 2x+3y-4z+8=0$

e) $(\mathcal{P})\colon 3x+4y-2z-15=0$.

Exercice 2

a) $(\mathcal{P})\colon 3x-y+2z-2=0$

b) $(\mathcal{P})\colon -4x+y-8=0$

c) $(\mathcal{P})\colon z-1=0$

Exercice 3

$(\mathcal{P})\colon -4x+y+2z+3=0$

6. Représentation paramétrique d'une droite

Soit un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.

Soit une droite (d) passant par le point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

Soit le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$M \in (d)$ ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{u}$

ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$

ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x - x_A = kx_{\vec{u}} \\ y - y_A = ky_{\vec{u}} \\ z - z_A = kz_{\vec{u}} \end{cases}$

ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ky_{\vec{u}} \\ z = z_A + kz_{\vec{u}} \end{cases}$

$\begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ky_{\vec{u}} \\ z = z_A + kz_{\vec{u}} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (d).

C'est comme une usine à points: chaque k va produire les coordonnées d'un point de la droite (d).

On note (d): $\begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ky_{\vec{u}} \\ z = z_A + kz_{\vec{u}} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

Une droite a une infinité d'équations paramétriques:

i. à la place du point A, on peut prendre n'importe quel autre point de la droite (d);
ii. à la place du vecteur directeur $\vec{u}$, on peut prendre n'importe quel autre vecteur directeur de la droite (d).

Exercice 1

Soit un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace. Déterminer une équation paramétrique pour chaque droite suivante.

a) La droite qui passe par les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$.

b) La droite (h) qui passe par $A\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$ et qui est parallèle à l'axe $(O;\vec{\imath})$.

c) La droite (t) qui passe par $C\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et qui est parallèle à l'axe $\left(O;\vec{k}\right)$.

d) La droite (p) qui passe par $C\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et qui est parallèle à une droite admettant comme vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$.

e) L'axe des abscisses c'est-à-dire la droite $(O;\vec{\imath})$.

f) L'axe des ordonnées c'est-à-dire la droite $(O;\vec{\jmath})$.

g) La droite $\left(O;\vec{k}\right)$.

h) La droite (s) qui passe par $D\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ et qui est parallèle à une droite admettant comme vecteur directeur le vecteur $3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-5\vec{k}$.

Exercice 2 (facultatif)

Soit un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace. Déterminer une équation paramétrique pour chaque droite suivante.

a) La droite qui passe par les points $C\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$.

b) La droite (v) qui passe par $A\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$ et qui est parallèle à l'axe $(O;\vec{\jmath})$.

Solutions des exercices 1 et 2

Exercice 1

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-(1) \\ 3-(2) \\ 0-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$;$(AB)$:$\begin{cases} x = 1+3k \\ y = 2+k \\ z = -5+5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

b) (h):$\begin{cases} x = 1+k \\ y = 2 \\ z = -5 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

c) (t):$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

d) (p):$\begin{cases} x = -1-2k \\ y = -2 \\ z = 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

e) $\begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

f) $\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

g) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

h) (s):$\begin{cases} x = 3+3k \\ y = -2+2k \\ z = 1-5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Exercice 2

a) (CD):$\begin{cases} x = -1+3k \\ y = -2-2k \\ z = -k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

b) (v):$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2+k \\ z = -5 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

7. Représentation paramétrique d'un plan

Soit un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace.

Soit un plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\\z_{\vec{u}}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_{\vec{v}}\\y_{\vec{v}}\\z_{\vec{v}}\end{pmatrix}$ non colinéaires.

Soit le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$M \in (\mathcal{P})$ ssi $\exists k \in \mathbb{R}, \exists k' \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\,\vec{u} + k'\vec{v}$

ssi $\exists k \in \mathbb{R}, \exists k' \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\\z_{\vec{u}}\end{pmatrix} + k'\begin{pmatrix}x_{\vec{v}}\\y_{\vec{v}}\\z_{\vec{v}}\end{pmatrix}$

ssi $\exists k \in \mathbb{R}, \exists k' \in \mathbb{R}, \begin{cases}x-x_A = kx_{\vec{u}} + k'x_{\vec{v}}\\y-y_A = ky_{\vec{u}} + k'y_{\vec{v}}\\z-z_A = kz_{\vec{u}} + k'z_{\vec{v}}\end{cases}$

ssi $\exists k \in \mathbb{R}, \exists k' \in \mathbb{R}, \begin{cases}x = x_A + kx_{\vec{u}} + k'x_{\vec{v}}\\y = y_A + ky_{\vec{u}} + k'y_{\vec{v}}\\z = z_A + kz_{\vec{u}} + k'z_{\vec{v}}\end{cases}$

$\begin{cases}x = x_A + kx_{\vec{u}} + k'x_{\vec{v}}\\y = y_A + ky_{\vec{u}} + k'y_{\vec{v}}\\z = z_A + kz_{\vec{u}} + k'z_{\vec{v}}\end{cases}$ est une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$.

C'est comme une usine à points: chaque couple (k,k') va produire les coordonnées d'un point du plan $(\mathcal{P})$.

On note $(\mathcal{P})$: $\begin{cases}x = x_A + kx_{\vec{u}} + k'x_{\vec{v}}\\y = y_A + ky_{\vec{u}} + k'y_{\vec{v}}\\z = z_A + kz_{\vec{u}} + k'z_{\vec{v}}\end{cases}$, $k \in \mathbb{R}, k' \in \mathbb{R}$.

Un plan a une infinité d'équations paramétriques:

iii. à la place du point A, on peut prendre n'importe quel autre point du plan $(\mathcal{P})$;

iv. à la place des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut prendre n'importe quel autre couple de vecteurs non colinéaires du plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 1(facultatif)

Soit un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace. Déterminer une équation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$ et de vecteurs non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Solutions de l'exercices 1

$$(\mathcal{P}):\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - k + k' \\ z = -5 + 3k - 2k' \end{cases} \quad , k \in \mathbb{R}, k' \in \mathbb{R}$$

8. Le projeté orthogonal d'un point sur un plan

Définition

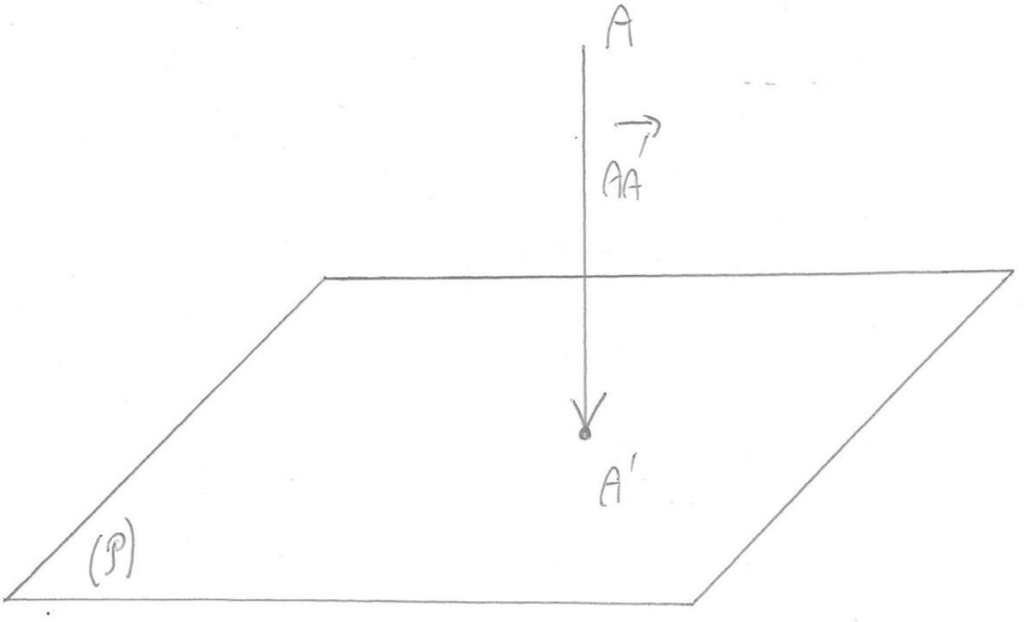
Le point A' est le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$

si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ et $A' \in (\mathcal{P})$

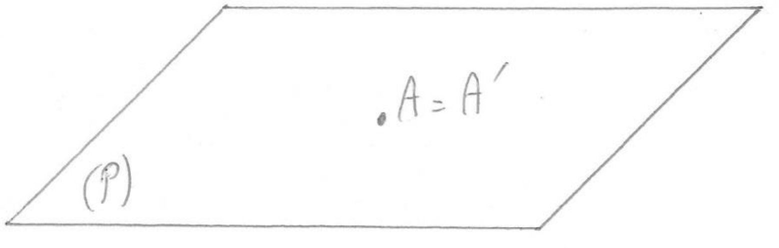
ou

$A \in (\mathcal{P})$ et $A = A'$.

CAS 1: $A \notin (\mathcal{P})$



CAS 2: $A \in (\mathcal{P})$



Définition

Soit un point A et un plan $(\mathcal{P})$.
Alors, $d\big(A, (\mathcal{P})\big) =$ la distance entre le point A et le plan $(\mathcal{P})$ $=$ la distance entre le point A et le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$.

Propriété

Soit un repère orhonormal.
Soit un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un plan $(\mathcal{P})$: $ax + by + cz + d = 0$.
Alors, $d\big(A, (\mathcal{P})\big) = \frac{|a\, x_A + b\, y_A + c\, z_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exercice 1

Baccalauréat S Métropole 21 juin 2011

EXERCICE 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, \mathscr{P})$ du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d(M_0, \mathscr{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Justifier que $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.
3. Conclure.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Calculer la distance du point A au plan $(\mathcal{P})$.

a) $A(1; -2; 3)$ et $(\mathcal{P})$: $2x + 3y - z - 4 = 0$
b) $A(0; -2; 4)$ et $(\mathcal{P})$: $-2x + 4y - 3z + 1 = 0$
c) $A(1; -2; 3)$ et $(\mathcal{P})$: $2x - z - 4 = 0$
d) $A(2; 0; 0)$ et $(\mathcal{P})$: $-x + 2z + 3 = 0$
e) $A(3; 1; -2)$ et $(\mathcal{P})$: $2x - 3y + z + 3 = 0$.

Solution

a) $d(A, (\mathcal{P})) = \frac{11\sqrt{14}}{14}$
b) $d(A, (\mathcal{P})) = \frac{19\sqrt{29}}{29}$
c) $d(A, (\mathcal{P})) = \sqrt{5}$
d) $d(A, (\mathcal{P})) = \frac{\sqrt{5}}{5}$
e) $d(A, (\mathcal{P})) = \frac{2\sqrt{14}}{7}$.

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Soit la sphère $(\mathcal{S})$ de rayon 4 et de centre $I(3;-2;0)$.
Soit les plans $(\mathcal{P}_1): z+4=0$
$(\mathcal{P}_2): -x-3y+2z+1=0$
$(\mathcal{P}_3): -x-3y+2z+24=0$.

a) Déterminer une équation de la sphère $(\mathcal{S})$.
b) Déterminer la position relative de la sphère $(\mathcal{S})$ et du plan $(\mathcal{P}_1)$.
c) Déterminer la position relative de la sphère $(\mathcal{S})$ et du plan $(\mathcal{P}_2)$.
d) Déterminer la position relative de la sphère $(\mathcal{S})$ et du plan $(\mathcal{P}_3)$.

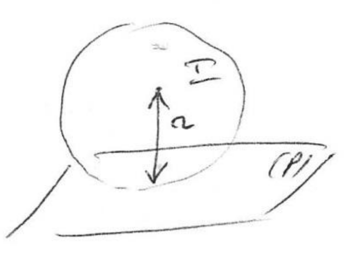
Solution

a) $(\mathcal{S}): (x-3)^2+(y+2)^2+z^2=16$.
b) $d\big(I,(\mathcal{P}_1)\big)=4$; $(\mathcal{P}_1)$ est tangent à $(\mathcal{S})$.
c) $d\big(I,(\mathcal{P}_2)\big)<4$; $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{S})$ sont sécants.
d) $d\big(I,(\mathcal{P}_3)\big)>4$; $(\mathcal{P}_3)$ est extérieur à $(\mathcal{S})$.

Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Le point I a pour coordonnées $(x_I;y_I;z_I)$.
Le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$.
$I\notin(\mathcal{P})$.
Déterminer une équation de la sphère $(\mathcal{S})$ de centre I et tangente à $(\mathcal{P})$.

Solution



$(\mathcal{S}): (x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=r^2$
avec $r=\dfrac{|a\,x_I+b\,y_I+c\,z_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Exercice 5

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Prouvez que l'aire du parallélogramme déterminé par $\vec{u}\ et\ \vec{v} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Solution

$\mathcal{A} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\big(\angle(\vec{u}, \vec{v})\big)$
$\mathcal{A} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$
c.q.f.d.

Exercice 6

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Prouvez que :

- $\|\vec{u} \wedge (-\vec{v})\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$
- $\|\vec{v} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$
- $\|\vec{u} \wedge (\vec{u} + \vec{v})\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

Solution

$\|\vec{u} \wedge (-\vec{v})\| = \|-(\vec{u} \wedge \vec{v})\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

$\|\vec{v} \wedge \vec{u}\| = \|-(\vec{u} \wedge \vec{v})\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

$\|\vec{u} \wedge (\vec{u} + \vec{v})\| = \|(\vec{u} \wedge \vec{u}) + (\vec{u} \wedge \vec{v})\| = \left\|\vec{0} + (\vec{u} \wedge \vec{v})\right\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$
c.q.f.d.

Exercice 7

Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Prouvez que le volume du parallélépipède déterminé par $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w} = |(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}|$.

Solution

$\mathcal{V} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \left\|\overrightarrow{w'}\right\|$ où $\overrightarrow{w'}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\vec{w}$ sur le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$
$\mathcal{V} = |(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}|$
c.q.f.d.

Exercice 8

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soient les points A, B, C et D.

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2) Calculer l'aire du triangle ABC.
3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4) En déduire la distance du point D au plan (ABC).
5) Déduire le volume du tétraèdre $ABCD$ en unités de volume et ensuite en cm^3.
   Remarque : volume_du_tétraèdre_$ABCD = \frac{aire_de_la_base_ABC \times d(D,(ABC))}{3}$.

a) $A(1; -2; 3)$; $B(1; 2; -3)$; $C(0; 1; -2)$; $D(2; 4; -3)$.
   Unités graphiques : 2 cm.
b) $A(2; 1; -2)$; $B(-2; 3; 4)$; $C(2; 3; -2)$; $D(0; 0; -1)$.
   Unités graphiques : 0,5 cm.
c) $A(-1; 2; 4)$; $B(0; 0; 0)$; $C(1; 1; -2)$; $D(2; 1; -3)$.
   Unités graphiques : 4 cm.

Solutions

a)

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\4\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}$
2) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2} = \sqrt{14}$
3) $(ABC): -x + 3y + 2z + 1 = 0$
4) $d(D, (ABC)) = \frac{5\sqrt{14}}{14}$
5) $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{S_{ABC} \times d(D,(ABC))}{3} = \frac{5}{3} = \frac{5}{3} u.v. = \frac{5}{3}(2\ cm)^3 = \frac{40}{3}\ cm^3$

b)

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\\6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-12\\0\\-8\end{pmatrix}$
2) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2} = 2\sqrt{13}$
3) $(ABC): 3x + 2z - 2 = 0$
4) $d(D, (ABC)) = \frac{4}{\sqrt{13}}$
5) $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{8}{3} = \frac{8}{3} u.v. = \frac{1}{3}\ cm^3$

c)

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\-2\\3\end{pmatrix}$
2) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{77}}{2}$
3) $(ABC): 8x - 2y + 3z = 0$
4) $d(D, (ABC)) = \frac{5\sqrt{77}}{77}$
5) $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{5}{6} = \frac{5}{6} u.v. = \frac{160}{3}\ cm^3$

Exercice 9

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Calculer le volume du parallélépipède $ABCDEFGH$ en unités de volume et ensuite en cm^3.

a) $A(1;-2;3)$; $B(1;2;-3)$; $D(0;1;-2)$; $E(2;4;-3)$.
Unités graphiques : 3 cm.

b) $A(2;1;-2)$; $B(-2;3;4)$; $D(2;3;-2)$; $E(3;0;-1)$.
Unités graphiques : 0,5 cm.

c) $A(-1;2;4)$; $B(0;0;0)$; $D(1;1;-2)$; $E(2;1;-6)$.
Unités graphiques : 5 cm.

Solutions

a) $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|; \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}; \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\6\\-6\end{pmatrix}; \mathcal{V}_{ABCDEFGH} = 10 = 270\ cm^3.$

b) $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|; \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-12\\0\\-8\end{pmatrix}; \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}; \mathcal{V}_{ABCDEFGH} = 20 = \frac{5}{2}\ cm^3.$

c) $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|; \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}8\\-2\\3\end{pmatrix}; \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}3\\-1\\-10\end{pmatrix}; \mathcal{V}_{ABCDEFGH} = 4 = 500\ cm^3.$

9. Position relative de deux droites

Propriétés

Soit $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ deux droites.
Alors :

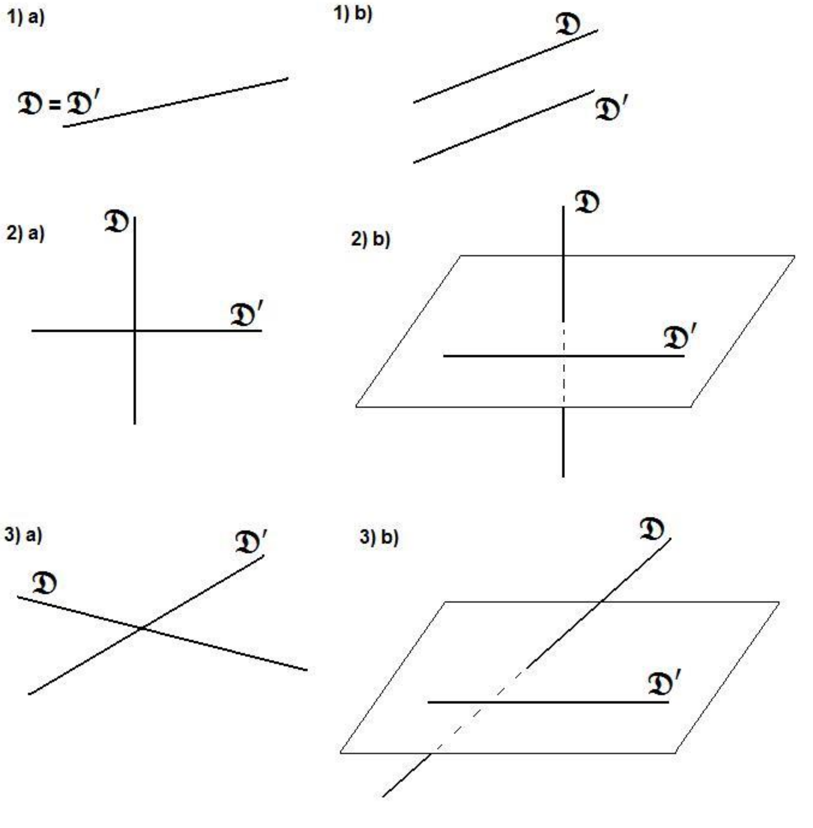
- $(\mathfrak{D}) \,//\, (\mathfrak{D}') \Leftrightarrow \exists(\vec{\mathrm{u}}, \overrightarrow{\mathrm{u}'}), \begin{cases} \vec{\mathrm{u}} \text{ est un vecteur directeur de } (\mathfrak{D}) \\ \overrightarrow{\mathrm{u}'} \text{ est un vecteur directeur de } (\mathfrak{D}') \\ \vec{\mathrm{u}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{u}'} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$

- $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont orthogonales $\Leftrightarrow \exists(\vec{\mathrm{u}}, \overrightarrow{\mathrm{u}'}), \begin{cases} \vec{\mathrm{u}} \text{ est un vecteur directeur de } (\mathfrak{D}) \\ \overrightarrow{\mathrm{u}'} \text{ est un vecteur directeur de } (\mathfrak{D}'). \\ \vec{\mathrm{u}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{u}'} \text{ sont orthogonaux} \end{cases}$

Méthode

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs respectivement des droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$.

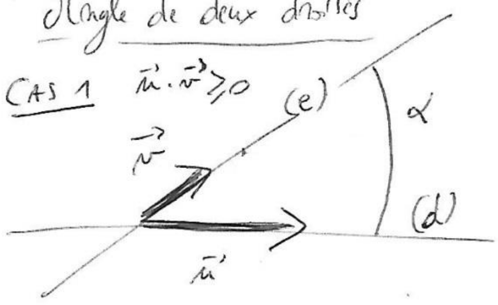
1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $(\mathfrak{D})$ **et** $(\mathfrak{D}')$ **sont parallèles**.
   On détermine un point $A \in (\mathfrak{D})$.
   a) Si $A \in (\mathfrak{D}')$, alors $(\mathfrak{D}) = (\mathfrak{D}')$.
   b) Si $A \notin (\mathfrak{D}')$, alors $(\mathfrak{D})$ **est strictement parallèle à** $(\mathfrak{D}')$.
2) Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$, alors $(\mathfrak{D})$ **et** $(\mathfrak{D}')$ **sont orthogonales**.
   a) Si $(\mathfrak{D}) \cap (\mathfrak{D}') \neq \emptyset$, **alors** $(\mathfrak{D}) \perp (\mathfrak{D}')$.
   b) Si $(\mathfrak{D}) \cap (\mathfrak{D}') = \emptyset$, alors $(\mathfrak{D})$ **et** $(\mathfrak{D}')$ **sont orthogonales et non sécantes**.
3) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$.
   a) Si $(\mathfrak{D}) \cap (\mathfrak{D}') \neq \emptyset$, alors $(\mathfrak{D})$ **et** $(\mathfrak{D}')$ **sont sécantes et non perpendiculaires**.
   b) Si $(\mathfrak{D}) \cap (\mathfrak{D}') = \emptyset$, alors $(\mathfrak{D})$ **et** $(\mathfrak{D}')$ **sont non sécantes, non orthogonales et non parallèles**.



Angle de deux droites

Angle de deux droites

CAS 1 $\vec{u}\cdot\vec{v} \geq 0$

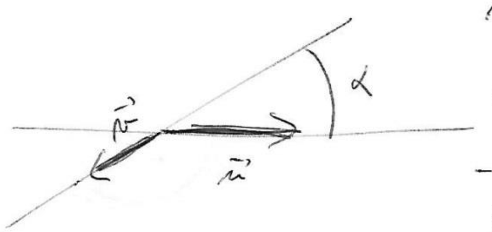


$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \cos\alpha$$

CAS 2 $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\pi-\alpha)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|(-\cos\alpha)$$

$$-\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \cos\alpha$$

CONCLUSION Dans tous les cas :

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}}$$

Exercice 1 - Position relative de la droite $(\mathfrak{D})$ par rapport à la droite $(\mathfrak{D}')$

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

a) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = -5 - 4k \\ y = 7 + 6k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ // $(\mathfrak{D}')$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant à la droite $(\mathfrak{D})$ et appeler ce point B.
3) Le point B, appartient-il à la droite $(\mathfrak{D}')$?
4) Déduire des questions précédentes si les droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont confondues ou strictement parallèles.

b) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = -1 - 4k \\ y = 11 + 6k \\ z = 6 + 2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ // $(\mathfrak{D}')$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant à la droite $(\mathfrak{D})$ et appeler ce point B.
3) Le point B, appartient-il à la droite $(\mathfrak{D}')$?
4) Déduire des questions précédentes si les droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont confondues ou strictement parallèles.

c) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 6 + t \\ y = -7 + t \\ z = -4 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.
2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$.
3) Est-ce que $(\mathfrak{D})$ est perpendiculaire à $(\mathfrak{D}')$?

d) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 6 + t \\ y = -7 + t \\ z = -4 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = -1 - k \\ y = -2 + 2k \\ z = -3 + k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.
2) Prouver que $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ n'ont pas de point d'intersection.
3) Est-ce que $(\mathfrak{D})$ est perpendiculaire à $(\mathfrak{D}')$?

e) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = 9 + 2k \\ y = 4 + 2k \\ z = -7 - k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathfrak{D}')$.
2) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.
3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$.
4) Est-ce que $(\mathfrak{D})$ est sécante à $(\mathfrak{D}')$.

f) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathfrak{D}')$.
2) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.
3) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas sécante à $(\mathfrak{D}')$.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

a) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 10 + 4t \\ y = -9 - 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = 4 - 2k \\ y = -5 + 2k \\ z = -6 + 7k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.
2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$.
3) Est-ce que $(\mathfrak{D})$ est perpendiculaire à $(\mathfrak{D}')$?

b) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = \quad -6k \\ y = 2 - 8k \\ z = -1 + 4k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ // $(\mathfrak{D}')$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant à la droite $(\mathfrak{D})$ et appeler ce point B.
3) Le point B, appartient-il à la droite $(\mathfrak{D}')$?
4) Déduire des questions précédentes si les droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont confondues ou strictement parallèles.

c) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 10 + 4t \\ y = -9 - 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = \quad -2k \\ y = 2 - 8k \\ z = -1 + 4k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathfrak{D}')$.
2) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.
3) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas sécante à $(\mathfrak{D}')$.

d) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 \\ z = 4 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = -8 + 6k \\ y = 3 \\ z = 7 - 3k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ // $(\mathfrak{D}')$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant à la droite $(\mathfrak{D})$ et appeler ce point B.
3) Le point B, appartient-il à la droite $(\mathfrak{D}')$?
4) Déduire des questions précédentes si les droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont confondues ou strictement parallèles.

e) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -3 - k \\ z = 2 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.
2) Prouver que $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ n'ont pas de point d'intersection.
3) Est-ce que $(\mathfrak{D})$ est perpendiculaire à $(\mathfrak{D}')$?

f) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 6 + 3t \\ z = -3 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = -2 - 2k \\ y = -1 - 2k \\ z = 2 + 3k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathfrak{D}')$.
2) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.
3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$.
4) Est-ce que $(\mathfrak{D})$ est sécante à $(\mathfrak{D}')$.

Solution de l'exercice 1

a) $(\mathfrak{D}): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'): \begin{cases} x = -5 - 4k \\ y = 7 + 6k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ // $(\mathfrak{D}')$.

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D})$.

Soit le vecteur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{u'}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D}')$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \end{matrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{u'} = -2\,\vec{u}$.

Donc, $(\mathfrak{D})$ // $(\mathfrak{D}')$.

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ // $(\mathfrak{D}')$ en calculant l'angle α entre les deux droites.

$$\cos \propto = \frac{\left|\vec{u}.\overrightarrow{u'}\right|}{\|\vec{u}\| \left\|\overrightarrow{u'}\right\|}$$

$\left|\vec{u}.\overrightarrow{u'}\right| = |(2)(-4) + (-3)(6) + (-1)(2)| = |-8 - 18 - 2| = |-28| = 28$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

$\left\|\overrightarrow{u'}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (6)^2 + (2)^2} = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56} = \sqrt{4.14} = 2\sqrt{14}$

$$\cos \propto = \frac{28}{\sqrt{14}\,2\,\sqrt{14}} = \frac{28}{28} = 1$$

$\propto = 0°$

Donc, $(\mathfrak{D})$ // $(\mathfrak{D}')$.

2) $B(1; -2; -1)$

3) Est-ce que $B \in (\mathfrak{D}')$?

Pour que B appartienne à $(\mathfrak{D}')$, il faut que $1 = -5 - 4k \Leftrightarrow 4k = -6 \Leftrightarrow k = \frac{-3}{2}$.

Avec $k = \frac{-3}{2}$, l'équation de $(\mathfrak{D}')$ nous donne le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -5 - 4\left(\frac{-3}{2}\right) \\ 7 + 6\left(\frac{-3}{2}\right) \\ 2 + 2\left(\frac{-3}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ce sont les coordonnées du point B.

Donc, $B \in (\mathfrak{D}')$.

4) On a : $(\mathfrak{D})$ // $(\mathfrak{D}')$
$B \in (\mathfrak{D}')$
$B \in (\mathfrak{D}')$.

Conclusion : $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont confondues.

Remarque :
Analysons l'intersection des droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$.
Soient k et t des réels.
Soit un point $M\begin{pmatrix} 1+2t \\ -2-3t \\ -1-t \end{pmatrix}$. $M \in (\mathfrak{D})$.
Soit un point $P\begin{pmatrix} -5-4k \\ 7+6k \\ 2+2k \end{pmatrix}$. $P \in (\mathfrak{D}')$.

$$M = P \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2t = -5-4k \\ -2-3t = 7+6k \\ -1-t = 2+2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2(-3-2k) = -5-4k \\ -2-3(-3-2k) = 7+6k \\ -3-2k = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5-4k = -5-4k \\ 7+6k = 7+6k \\ t = -3-2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} VRAI \\ VRAI \\ t = -3-2k \end{cases} \Leftrightarrow t = -3-2k.$$

Il y a une infinité de point d'intersection.
Donc, $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont confondues.

b) $(\mathfrak{D}) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}$ $où\, t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}') : \begin{cases} x = -1-4k \\ y = 11+6k \\ z = 6+2k \end{cases}$ $où\, k \in \mathbb{R}$.

1) **Prouvons que $(\mathfrak{D})\ //\ (\mathfrak{D}')$**
Comme à l'exercice a).
Donc, $(\mathfrak{D})\ //\ (\mathfrak{D}')$.

2) $B(1;-2;-1)$

3) **Est-ce que $B \in (\mathfrak{D}')$?**
Pour que B appartienne à $(\mathfrak{D}')$, il faut que $1 = -1-4k \Leftrightarrow 4k = -2 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{2}$.
Avec $k = \frac{-1}{2}$, l'équation de $(\mathfrak{D}')$ nous donne le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -1-4\left(\frac{-1}{2}\right) \\ 11+6\left(\frac{-1}{2}\right) \\ 6+2\left(\frac{-1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Ce ne sont pas les coordonnées du point B.
Donc, $B \notin (\mathfrak{D}')$.

4) On a : $(\mathfrak{D})\ //\ (\mathfrak{D}')$
$B \in (\mathfrak{D})$
$B \notin (\mathfrak{D}')$.
Conclusion : $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont strictement parallèle.

c) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 6+t \\ y = -7+t \\ z = -4-t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k \\ z = k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D})$.

Soit le vecteur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{u'}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D}')$.

$\vec{u}\,.\overrightarrow{u'} = (1)(-1) + (1)(2) + (-1)(1) = 0$

Donc, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$sont orthogonaux .

Donc, $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$ en calculant l'angle α entre les deux droites.

$$\cos \propto = \frac{\left|\vec{u}.\overrightarrow{u'}\right|}{\|\vec{u}\| \left\|\overrightarrow{u'}\right\|}$$

$$\cos \propto = \frac{0}{\|\vec{u}\| \left\|\overrightarrow{u'}\right\|} = 0$$

$\propto = 90°$

Donc, $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.

2) Déterminons les coordonnées du point d'intersection A des droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$.

Soient k et t des réels.

Soit un point $M\begin{pmatrix} 6+t \\ -7+t \\ -4-t \end{pmatrix}$. $M \in (\mathfrak{D})$.

Soit un point $P\begin{pmatrix} 2-k \\ 1+2k \\ k \end{pmatrix}$. $P \in (\mathfrak{D}')$.

$$M = P \Leftrightarrow \begin{cases} 6+t = 2-k \\ -7+t = 1+2k \\ -4-t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6+t = 2-(-4-t) \\ -7+t = 1+2(-4-t) \\ -4-t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6+t = 6+t \\ -7+t = -7-2t \\ -4-t = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ t = 0 \\ -4-(0) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} VRAI \\ t = 0 \\ -4 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = -4 \end{cases}.$$

$\boldsymbol{A(6;-7;-4)}$**.**

3) $(\mathfrak{D}) \perp (\mathfrak{D}')$.

d) $(\mathfrak{D}) : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -7 + t \\ z = -4 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}') : \begin{cases} x = -1 - k \\ y = -2 + 2k \\ z = -3 + k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.

Comme l'exercice c).

Donc, $(\mathfrak{D})$ est orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.

2) Prouvons que les droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ n'ont pas de point d'intersection.

Soient k et t des réels.

Soit un point $M\begin{pmatrix} 6+t \\ -7+t \\ -4-t \end{pmatrix}$. $M \in (\mathfrak{D})$.

Soit un point $P\begin{pmatrix} -1-k \\ -2+2k \\ -3+k \end{pmatrix}$. $P \in (\mathfrak{D}')$.

$$M = P \Leftrightarrow \begin{cases} 6+t = -1-k \\ -7+t = -2+2k \\ -4-t = -3+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7-k \\ -7+(-7-k) = -2+2k \\ -4-(-7-k) = -3+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7-k \\ -14-k = -2+2k \\ 3+k = -3+k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -7-k \\ -12 = 3k \\ 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7-k \\ -4 = k \\ FAUX \end{cases} \Leftrightarrow FAUX.$$

Par conséquent, $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ n'ont pas de point d'intersection.

3) $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ ne sont pas perpendiculaires.

e) $(\mathfrak{D}) : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}') : \begin{cases} x = 9 + 2k \\ y = 4 + 2k \\ z = -7 - k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathfrak{D}')$.

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D})$.

Soit le vecteur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{u'}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D}')$.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\times\left(\frac{-2}{3}\right)} \\ \xrightarrow{\times 2} \\ \xrightarrow{\times\left(\frac{-1}{2}\right)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires.

$(\mathfrak{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathfrak{D}')$.

2) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.

$\vec{u} \,.\, \overrightarrow{u'} = (-3)(2) + (1)(2) + (2)(-1) = -6 \neq 0$

Donc, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas orthogonaux .

Donc, $(\mathfrak{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.

Remarque :

Prouvons que $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ ne sont ni parallèles ni orthogonales en calculant l'angle α entre les deux droites.

$$\cos \propto = \frac{|\vec{u}.\overrightarrow{u'}|}{\|\vec{u}\|\|\overrightarrow{u'}\|}$$

$$|\vec{u}.\overrightarrow{u'}| = 6$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$\|\overrightarrow{u'}\| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos \propto = \frac{6}{\sqrt{14}\ 3} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\propto = \arccos \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$\propto \approx 58°$ au degré près

Donc, $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ ne sont ni parallèles ni orthogonales.

3) Déterminons les coordonnées du point d'intersection A des droites $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$.

Soient k et t des réels.

Soit un point $M\begin{pmatrix} 2-3t \\ 1+t \\ -3+2t \end{pmatrix}$. $M \in (\mathfrak{D})$.

Soit un point $P\begin{pmatrix} 9+2k \\ 4+2k \\ -7-k \end{pmatrix}$. $P \in (\mathfrak{D}')$.

$$M = P \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3t = 9+2k \\ 1+t = 4+2k \\ -3+2t = -7-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3t = 9+2(-2t-4) \\ 1+t = 4+2k \\ k = -2t-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3t = 1-4t \\ 1+t = 4+2k \\ k = -2t-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ 1+(-1) = 4+2k \\ k = -2(-1)-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ -4 = 2k \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ k = -2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{A(5; 0; -5)}$.

4) $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont sécantes.

f) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{D}'):\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ ne sont pas parallèles.

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D})$.

Soit le vecteur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{u'}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D}')$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\times\left(\frac{-1}{2}\right)} \\ \xrightarrow{\times\left(\frac{-2}{3}\right)} \\ \xrightarrow{\times(-1)} \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires.

$(\mathfrak{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathfrak{D}')$.

2) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.

$\vec{u}\,.\overrightarrow{u'} = (2)(-1) + (-3)(2) + (-1)(1) = -9 \neq 0$

Donc, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas orthogonaux .

Donc, $(\mathfrak{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathfrak{D}')$.

3) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ n'est pas sécante à $(\mathfrak{D}')$.

Soient k et t des réels.

Soit le point $M\begin{pmatrix} 1 + 2t \\ -2 - 3t \\ -1 - t \end{pmatrix}$. $M \in (\mathfrak{D})$.

Soit le point $P\begin{pmatrix} 2 - k \\ 1 + 2k \\ k \end{pmatrix}$. $P \in (\mathfrak{D}')$.

$$M = P \Leftrightarrow, \begin{cases} 1 + 2t = 2 - k \\ -2 - 3t = 1 + 2k \\ -1 - t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 2 - (-1 - t) \\ -2 - 3t = 1 + 2k \\ -1 - t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3 + t \\ -2 - 3t = 1 + 2k \\ -1 - t = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ -2 - 3(2) = 1 + 2k \\ -1 - (2) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ -8 = 1 + 2k \\ -3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ -9 = 2k \\ k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ -4{,}5 = k \\ k = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ -4{,}5 = k \\ -4{,}5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ -4{,}5 = k \\ FAUX \end{cases} \Leftrightarrow FAUX\ .$$

Il n'y a pas de point d'intersection.

Par conséquent, $(\mathfrak{D})$ n'est pas sécante à $(\mathfrak{D}')$.

Solution de l'exercice 2

a) 2) $\mathrm{A}(2; -3; 1)$ 3) $(\mathfrak{D}) \perp (\mathfrak{D}')$.

b) 2) $\mathrm{B}(-2; 3; 2)$ 3) $\mathrm{B} \notin (\mathfrak{D}')$ 4) $(\mathfrak{D})$ est strictement parallèle à $(\mathfrak{D}')$

c)

d) 2) $\mathrm{B}(-2; 3; 4)$ 3) $\mathrm{B} \in (\mathfrak{D}')$ 4) $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ sont confondues

e) 3) $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ ne sont pas perpendiculaires.

f) 3) $\mathrm{A}(2; 3; -4)$; 4) $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}')$ son sécantes.

10.Position relative de deux plans

Propriétés

Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de l'espace.
Alors :

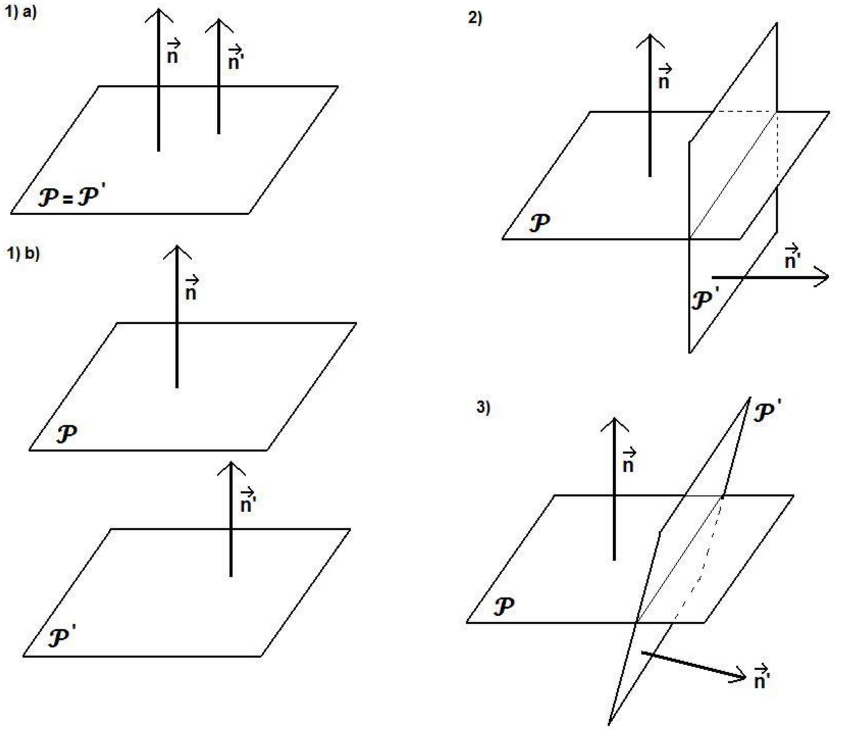
- $(\mathcal{P}) \mathbin{//} (\mathcal{P}') \iff \exists\left(\vec{\mathrm{n}}, \overrightarrow{\mathrm{n}'}\right), \begin{cases} \vec{\mathrm{n}} \text{ est un vecteur normal de } (\mathcal{P}) \\ \overrightarrow{\mathrm{n}'} \text{ est un vecteur normal de } (\mathcal{P}') \\ \vec{\mathrm{n}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{n}'} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$

- $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}') \iff \exists\left(\vec{\mathrm{n}}, \overrightarrow{\mathrm{n}'}\right), \begin{cases} \vec{\mathrm{n}} \text{ est un vecteur normal de } (\mathcal{P}) \\ \overrightarrow{\mathrm{n}'} \text{ est un vecteur normal de } (\mathcal{P}') \\ \vec{\mathrm{n}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{n}'} \text{ sont orthogonaux} \end{cases}$.

Méthode

Soit $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ deux vecteurs normaux respectivement aux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

1) Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, alors $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ **//** $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.
   On détermine un point $A \in (\mathcal{P})$.
   a) Si $A \in (\mathcal{P}')$, alors $(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = (\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.
   b) Si $A \notin (\mathcal{P}')$, alors $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ **est strictement parallèle à** $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.
2) Si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$, alors $(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \perp (\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.
3) Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} \neq 0$, alors $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ **et** $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$ **sont sécants et non perpendiculaires**.



Angle de deux plans

Définition

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit un plan $(\mathcal{P})$ de vecteur normal $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ et un plan $(\mathcal{P}')$ de vecteur normal $\vec{n}_{\mathcal{P}'}$.
L'angle entre le plan $(\mathcal{P})$ et un plan $(\mathcal{P}') = \arccos \frac{|\vec{n}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{n}_{\mathcal{P}'}|}{\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\| \|\vec{n}_{\mathcal{P}'}\|}$.
On note souvent cet angle α.

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

a) $(\mathcal{P}): 2x+y-z-8=0$ et $(\mathcal{P}'): -4x-2y+2z+16=0$

1) Prouver que $(\mathcal{P})//(\mathcal{P}')$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant au plan $(\mathcal{P})$ et appeler ce point A.
3) Le point A, appartient-il au plan $(\mathcal{P}')$.
4) Déduire des questions précédente si les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont soit confondus soit strictement parallèles.

b) $(\mathcal{P}): 2x+y-z-8=0$ et $(\mathcal{P}'): -4x-2y+2z+26=0$

Prouver que$(\mathcal{P})//(\mathcal{P}')$.

1) Prouver que $(\mathcal{P})//(\mathcal{P}')$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant au plan $(\mathcal{P})$ et appeler ce point A.
3) Le point A, appartient-il au plan $(\mathcal{P}')$.
4) Déduire des question précédente si les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont soit confondus soit strictement parallèles.

c) $(\mathcal{P}): 2x+y-z-8=0$ et $(\mathcal{P}'): 2x-y+3z+4=0$

1) Prouver que $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection $(\mathfrak{D})$ des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

d) $(\mathcal{P}): 2x+y-z-8=0$ et $(\mathcal{P}'): x-y+2z+4=0$

1) Prouver que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas parallèles.
2) Prouver que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas perpendiculaires.
3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection $(\mathfrak{D})$ des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

a) $(\mathcal{P}): 2x-2y+z+3=0$ et $(\mathcal{P}'): 3x+4y+2z-1=0$

1) Prouver que $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection $(\mathfrak{D})$ des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

b) $(\mathcal{P}): 2x-2y+z+3=0$ et $(\mathcal{P}'): 6x-6y+3z+9=0$

1) Prouver que $(\mathcal{P})//(\mathcal{P}')$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant au plan $(\mathcal{P})$ et appeler ce point A.
3) Le point A, appartient-il au plan $(\mathcal{P}')$.
4) Déduire des questions précédente si les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont soit confondus soit strictement parallèles.

c) $(\mathcal{P}): 2x-2y+z+3=0$ et $(\mathcal{P}'): 2x-3y+2=0$

1) Prouver que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas parallèles.
2) Prouver que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas perpendiculaires.
3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection $(\mathfrak{D})$ des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

d) $(\mathcal{P}): 2x-2y+z+3=0$ et $(\mathcal{P}'): -4x+4y-2z=0$

1) Prouver que $(\mathcal{P})//(\mathcal{P}')$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant au plan $(\mathcal{P})$ et appeler ce point A.
3) Le point A, appartient-il au plan $(\mathcal{P}')$.
4) Déduire des questions précédente si les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont soit confondus soit strictement parallèles.

Solution de l'exercice 1

a) $(\mathcal{P}): 2x+y-z-8=0$ et $(\mathcal{P}'): -4x-2y+2z+16=0$.

1) Montrons que $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ // $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.

Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$.

Soit le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n'}$ est normal à $(\mathcal{P}')$.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{\times(-2)}\\\xrightarrow{\times(-2)}\\\xrightarrow{\times(-2)}\end{matrix}\begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{n'}=-2\,\vec{n}$.

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.

Donc, $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ // $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.

1) Montrons que $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ // $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$ en calculant l'angle entre les deux plans.

$$\cos\propto=\frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\|\vec{n}\|\left\|\overrightarrow{n'}\right\|}$$

$\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right|=|(2)(-4)+(1)(-2)+(-1)(2)|=|-8-2-2|=|-12|=12$

$\|\vec{n}\|=\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$\left\|\overrightarrow{n'}\right\|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=2\sqrt{6}$

$$\cos\propto=\frac{12}{\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}}=1$$

$\propto=0°$

Donc, $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ // $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.

2) $A(-1;4;-6)$

3) Le point A, appartient-il au plan $(\mathcal{P}')$

$$\begin{aligned}A\in(\mathcal{P}') &\Leftrightarrow -4(-1)-2(4)+2(-6)+16=0\\ &\Leftrightarrow -16+16=0\\ &\Leftrightarrow vrai\end{aligned}$$

Donc, $A\in(\mathcal{P}')$.

4) On a : $(\mathcal{P})$ // $(\mathcal{P}')$
$A\in(\mathcal{P})$
$A\in(\mathcal{P})$.

On en déduit que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus.

Remarque :

Analysons l'intersection entre les deux plans.

$$\begin{cases}2x+y-z-8=0\\-4x-2y+2z+16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-z-8=0\\2x+y-z-8=0\end{cases}\Leftrightarrow 2x+y-z-8=0$$

$(\boldsymbol{\mathcal{P}})\cap(\boldsymbol{\mathcal{P}'})=(\boldsymbol{\mathcal{P}})$

Donc, $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ **et** $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$ **sont confondus**.

b) $(\mathcal{P}): 2x + y - z - 8 = 0$ et $(\mathcal{P}'): -4x - 2y + 2z + 26 = 0$.

1) **Est-ce que $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ // $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$?**
   Comme dans la question a).
   Donc, $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ // $(\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.
2) $A(-1; 4; -6)$
3) Le point A, appartient-il au plan $(\mathcal{P}')$
   $A(-1; 4; -6)$
   $A \in (\mathcal{P}') \quad \Leftrightarrow \quad -4(-1) - 2(4) + 2(-6) + 26 = 0$
   $\phantom{A \in (\mathcal{P}')} \quad \Leftrightarrow \quad -16 + 26 = 0$
   $\phantom{A \in (\mathcal{P}')} \quad \Leftrightarrow \quad faux$
   Donc, $A \notin (\mathcal{P}')$.
4) On a : $(\mathcal{P})$ // $(\mathcal{P}')$
   $A \in (\mathcal{P})$
   $A \notin (\mathcal{P})$.
   On en déduit que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont strictement parallèles.

c) $(\mathcal{P}): 2x + y - z - 8 = 0$ et $(\mathcal{P}'): 2x - y + 3z + 4 = 0$.

1) Prouvons que $(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \perp (\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.

Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$.

Soit le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n'}$ est normal à $(\mathcal{P}')$.

$\vec{n}\,.\overrightarrow{n'} = (2)(2) + (1)(-1) + (-1)(3) = 0$.

Par conséquent, $(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \perp (\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.

1) Montrons que $(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \perp (\boldsymbol{\mathcal{P}'})$ en calculant l'angle entre les deux plans.

$$\cos \propto = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\|\vec{n}\| \left\|\overrightarrow{n'}\right\|}$$

$\cos \propto = 0$

$\propto = 90°$

Donc, $(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \perp (\boldsymbol{\mathcal{P}'})$.

2) Déterminons une représentation paramétrique de la droite d'intersection $(\mathfrak{D})$.

$$(\mathfrak{D}): \begin{cases} 2x + y - z - 8 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 4z - 12 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z + 6 \\ 2x - (2z + 6) + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z + 6 \\ x = \frac{-1}{2} z + 1 \end{cases}$$

$$(\mathfrak{D}): \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - \frac{1}{2}t} \\ \boldsymbol{y = 6 + 2t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases} \quad \textbf{où } \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}.$$

2) Déterminons une représentation paramétrique de la droite d'intersection $(\mathfrak{D})$.

$$(\mathfrak{D}): \begin{cases} 2x + y - z - 8 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} y + \frac{z}{2} + 4 \\ 2\left(\frac{-1}{2} y + \frac{z}{2} + 4\right) - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} y + \frac{z}{2} + 4 \\ -2y + 4z + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} y + \frac{z}{2} + 4 \\ z = -3 + \frac{1}{2} y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} y + \frac{\left(-3 + \frac{1}{2} y\right)}{2} + 4 \\ z = -3 + \frac{1}{2} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{4} y + \frac{5}{2} \\ z = -3 + \frac{1}{2} y \end{cases}$$

$$(\mathfrak{D}): \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{5}{2} - \frac{1}{4}t} \\ \boldsymbol{y = t} \\ \boldsymbol{z = -3 + \frac{1}{2}t} \end{cases} \quad \textbf{où } \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}.$$

d) $(\mathcal{P}): 2x + y - z - 8 = 0$ et $(\mathcal{P}'): x - y + 2z + 4 = 0$.

1) Prouvons que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas parallèles.

Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$.

Soit le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n'}$ est normal à $(\mathcal{P}')$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\times\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \xrightarrow{\times(-1)} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires.

Donc, $(\mathcal{P})$ n'est pas parallèle à $(\mathcal{P}')$.

2) Prouvons que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas perpendiculaires.

$\vec{n} \, . \overrightarrow{n'} = (2)(1) + (1)(-1) + (-1)(2) = -1 \neq 0$.

Par conséquent, $(\mathcal{P})$ n'est pas perpendiculaire à $(\mathcal{P}')$.

Remarque:

Prouvons que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants et non perpendiculaires en calculant l'angle entre les deux plans.

$$\cos \propto = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\|\vec{n}\| \left\|\overrightarrow{n'}\right\|}$$

$\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right| = 1$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\left\|\overrightarrow{n'}\right\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\cos \propto = \dfrac{1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{1}{6}$

$\propto = \arccos \dfrac{1}{6}$

$\propto = 80{,}4°$

$\propto \approx 80{,}4°$ au dixième de degré près

3) Déterminons une représentation paramétrique de la droite d'intersection $(\mathfrak{D})$.

$$(\mathfrak{D}): \begin{cases} 2x + y - z - 8 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + z - 4 = 0 \\ y = x + 2z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} - \frac{z}{3} \\ y = \left(\frac{4}{3} - \frac{z}{3}\right) + 2z + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} - \frac{z}{3} \\ y = \frac{16}{3} + \frac{5}{3}\, z \end{cases}$$

$$(\mathfrak{D}): \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{4}{3} - \frac{t}{3}} \\ \boldsymbol{y = \frac{16}{3} + \frac{5}{3} t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases} \quad \textbf{où } \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2

a) 2) $(\mathfrak{D}): \begin{cases} x = -\frac{5}{7} - \frac{4}{7}t \\ y = \frac{11}{14} - \frac{1}{14}t \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

b) 2) $A(-1; 4; 7)$ 3) $A \in (\mathcal{P}')$ 4) $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus.

c) 3) $(\mathfrak{D}): \begin{cases} x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

d) 2) $A(-1; 4; 7)$ 3) $A \notin (\mathcal{P}')$ 4) $(\mathcal{P})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P}')$.

11.Position relative d'une droite et d'un plan

Propriétés

Soit $(\mathfrak{D})$ une droite de l'espace et $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace.
Alors :

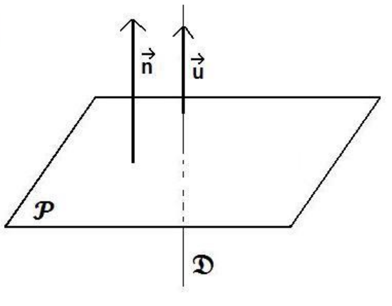
- $(\mathfrak{D}) \perp (\mathcal{P}) \iff \exists(\vec{u},\vec{n}), \begin{cases} \vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } (\mathfrak{D}) \\ \vec{n} \text{ est un vecteur normal de } (\mathcal{P}) \\ \vec{u} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$
- $(\mathfrak{D}) \mathbin{//} (\mathcal{P}) \iff \exists(\vec{u},\vec{n}), \begin{cases} \vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } (\mathfrak{D}) \\ \vec{n} \text{ est un vecteur normal de } (\mathcal{P}) \\ \vec{u} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \end{cases}$.

Méthode

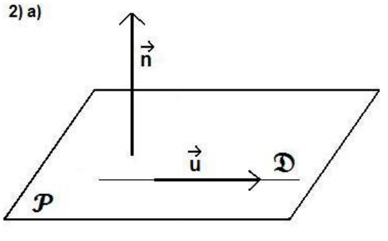
Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $(\mathfrak{D})$ et $\vec{n}$ un vecteur normal du plan $(\mathcal{P})$.

1) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, alors $(\boldsymbol{\mathfrak{D}}) \perp (\boldsymbol{\mathcal{P}})$.
2) Si $\vec{u}\,.\vec{n} = 0$, alors $(\boldsymbol{\mathfrak{D}})$ **//** $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$.
   On détermine un point $A \in (\mathfrak{D})$.
   a) Si $A \in (\mathcal{P})$, alors $(\boldsymbol{\mathfrak{D}}) \subset (\boldsymbol{\mathcal{P}})$.
   b) Si $A \notin (\mathcal{P})$, alors $(\boldsymbol{\mathfrak{D}})$ **est strictement parallèle à** $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$.
3) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaire et $\vec{u}\,.\vec{n} \neq 0$, alors $(\boldsymbol{\mathfrak{D}})$ **et** $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ **sont sécantes et non perpendiculaires**.

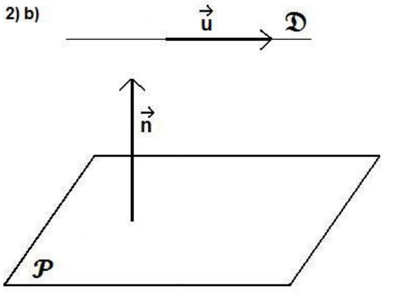
1)



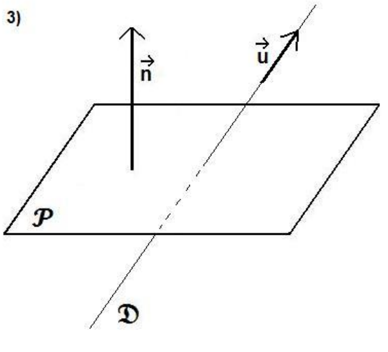
2) a)



2) b)



3)



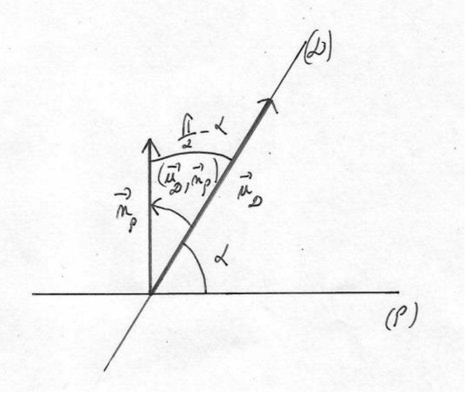
Angle d'une droite et d'un plan

Définition

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Soit une droite $(\mathcal{D})$ et un plan $(\mathcal{P})$.
L'angle entre la droite $(\mathcal{D})$ et le plan $(\mathcal{P}) = \arcsin\frac{|\vec{u}_{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\mathcal{P}}|}{\|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|}$.
On note souvent cet angle α.

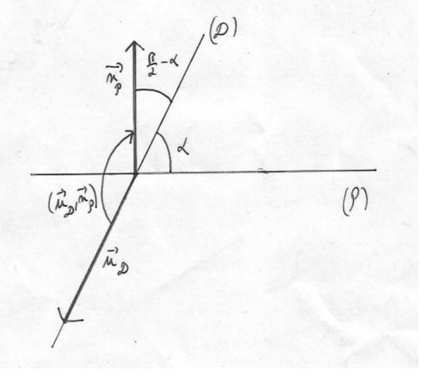
Remarque

CAS 1 : $\vec{u}_{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\mathcal{P}} \geq 0$



$$\vec{u}_{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\mathcal{P}} = \|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|\cos(\vec{u}_{\mathcal{D}},\vec{n}_{\mathcal{P}}) = \|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|\sin\alpha$$
$$|\vec{u}_{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\mathcal{P}}| = \|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|\sin\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}_{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\mathcal{P}}|}{\|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|}$$

CAS 2 : $\vec{u}_{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\mathcal{P}} < 0$



$$\vec{u}_{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\mathcal{P}} = -(-\vec{u}_{\mathcal{D}}).\vec{n}_{\mathcal{P}} = -\|-\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|\cos(-\vec{u}_{\mathcal{D}},\vec{n}_{\mathcal{P}}) = -\|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$= -\|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|\sin\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{-\vec{u}_{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\mathcal{P}}}{\|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|}$$
$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}_{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\mathcal{P}}|}{\|\vec{u}_{\mathcal{D}}\|\|\vec{n}_{\mathcal{P}}\|}$$

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Soient une droite $(\mathfrak{D})$ et un plan $(\mathcal{P})$.

a) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t-2 \\ z=-2t-3 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{P}): x+y+z-4=0$

1) Prouver que $(\mathfrak{D})\perp(\mathcal{P})$.
2) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection A.

b) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-1-t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{P}): 4x+y+5z+3=0$

1) Prouver que $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant à la droite $(\mathfrak{D})$ et appeler ce point A.
3) Est-ce que ce point A appartient au plan $(\mathcal{P})$?
4) En déduire si la droite $(\mathfrak{D})$ est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$ ou alors si la droite $(\mathfrak{D})$ est incluse dans plan $(\mathcal{P})$.

c) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-1-t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{P}): 4x+y+5z+4=0$

1) Prouver que $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant à la droite $(\mathfrak{D})$ et appeler ce point A.
3) Est-ce que ce point A appartient au plan $(\mathcal{P})$?
4) En déduire si la droite $(\mathfrak{D})$ est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$ ou alors si la droite $(\mathfrak{D})$ est incluse dans plan $(\mathcal{P})$.

d) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{P}) : 4x+y+5z+3=0$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.
2) Prouver que $(\mathfrak{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.
3) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection A.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Étudier la position relative de la droite $(\mathfrak{D})$ par rapport au plan $(\mathcal{P})$ et donner les coordonnées de leur point d'intersection A s'ils sont sécants.

a) $(\mathfrak{D})\colon\begin{cases} x=-3+3t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{P})\colon y-2z=0$

1) Prouver que $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant à la droite $(\mathfrak{D})$ et appeler ce point A.
3) Est-ce que ce point A appartient au plan $(\mathcal{P})$?
4) En déduire si la droite $(\mathfrak{D})$ est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$ ou alors si la droite $(\mathfrak{D})$ est incluse dans plan $(\mathcal{P})$.

b) $(\mathfrak{D})\colon\begin{cases} x=-5+2t \\ y=10-3t \\ z=5-t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{P})\colon x-2y+5z-12=0$

1) Prouver que $(\mathfrak{D})$ n'est pas perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.
2) Prouver que $(\mathfrak{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.
3) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection A.

c) $(\mathfrak{D})\colon\begin{cases} x=7-3t \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{P})\colon 3x+6=0$

1) Prouver que $(\mathfrak{D})\perp(\mathcal{P})$.
2) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection A.

d) $(\mathfrak{D})\colon\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-3t \\ z=1+2t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{P}) : 4x+2y-z+3=0$.

1) Prouver que $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$.
2) Donner les coordonnées d'un point appartenant à la droite $(\mathfrak{D})$ et appeler ce point A.
3) Est-ce que ce point A appartient au plan $(\mathcal{P})$?
4) En déduire si la droite $(\mathfrak{D})$ est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$ ou alors si la droite $(\mathfrak{D})$ est incluse dans plan $(\mathcal{P})$.

Solution de l'exercice 1

a) $(\mathfrak{D}):\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t-2 \\ z=-2t-3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{P}): x+y+z-4=0.$

1) Prouvons que $(\mathfrak{D}) \perp (\mathcal{P})$.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D})$.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{\times(-2)}\\\xrightarrow{\times(-2)}\\\xrightarrow{\times(-2)}\end{matrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires car $\vec{n}=-2\,\vec{u}$.

Donc, $(\mathfrak{D}) \perp (\mathcal{P})$.

1) Prouvons que $(\mathfrak{D}) \perp (\mathcal{P})$ en calculant l'angle entre le plan et la droite.

$\sin\alpha=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{n}\|}$

$|\vec{u}.\vec{n}|=|(1)(-2)+(1)(-2)+(1)(-2)|=|-6|=6$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}=\sqrt{3}$

$\|\vec{n}\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\sin\alpha=\dfrac{6}{\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}}=1$

$\alpha=90°$

Donc, $(\mathfrak{D}) \perp (\mathcal{P})$.

2) Déterminons les coordonnées du point d'intersection A.

Soit t un réel. Soit le point $M\begin{pmatrix}-2t\\-2t-2\\-2t-3\end{pmatrix}$. $M \in (\mathfrak{D})$.

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow (-2t)+(-2t-2)+(-2t-3)-4=0 \Leftrightarrow -6t-9=0 \Leftrightarrow t=\frac{9}{-6}=\frac{-3}{2}.$

$$A\begin{pmatrix}-2\left(\frac{-3}{2}\right)\\-2\left(\frac{-3}{2}\right)-2\\-2\left(\frac{-3}{2}\right)-3\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$.

b) $(\mathfrak{D}): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $\quad$ où $t \in \mathbb{R}$ $\quad$ et $\quad$ $(\mathcal{P}): 4x + y + 5z + 3 = 0.$

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}$. $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D})$.

$\vec{u}\,.\vec{n} = (2)(4) + (-3)(1) + (-1)(5) = 0$

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

D'où, $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$.

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$ en calculant l'angle entre le plan et la droite.

$\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{n}\|}$

$\sin\alpha = 0$

$\alpha = 0°$

Donc, $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$.

2) $A(1; -2; -1)$

3) $A \in (\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad 4(1) + (-2) + 5(-1) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad vrai.$

Donc, $A \in \mathcal{P}$.

4) On a : $\quad (\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$

$A \in (\mathfrak{D})$

$A \in (\mathcal{P})$.

Par conséquent, la droite $(\mathfrak{D})$ est incluse dans plan $(\mathcal{P})$.

Remarque :

Analysons l'intersection.

Soit t un réel. Soit le point $M\begin{pmatrix}1+2t\\-2-3t\\-1-t\end{pmatrix}$. $M \in (\mathfrak{D})$.

$M \in (\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow 4(1+2t) + (-2-3t) + 5(-1-t) + 3 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0 \Leftrightarrow VRAI.$

Il y a une infinité de points d'intersection.

Donc, $(\mathfrak{D})$ est incluse dans $(\mathcal{P})$.

c) $(\mathfrak{D}): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{P}): 4x + y + 5z + 4 = 0.$

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$.
Comme dans la question b).
D'où, $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$.

2) $A(1; -2; -1)$
3) $A \in (\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad 4(1) + (-2) + 5(-1) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad faux.$
Donc, $A \notin \mathcal{P}$.
4) On a : $(\mathfrak{D})//(\mathcal{P})$
$A \in (\mathfrak{D})$
$A \notin (\mathcal{P})$.
Par conséquent, la droite $(\mathfrak{D})$ est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

Remarque :
Analysons l'intersection.
Soit t un réel. Soit le point $M\begin{pmatrix} 1 + 2t \\ -2 - 3t \\ -1 - t \end{pmatrix}$. $M \in (\mathfrak{D})$.
$M \in (\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow 4(1 + 2t) + (-2 - 3t) + 5(-1 - t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 0t = -1 \Leftrightarrow FAUX.$
Il n'y a pas de point d'intersection.
Donc, $(\mathfrak{D})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$.

d) $(\mathfrak{D})$: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{P})$: $4x + y + 5z + 3 = 0$.

1) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ n'est pas perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathfrak{D})$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\times\left(\frac{-1}{4}\right)} \\ \xrightarrow{\times(2)} \\ \xrightarrow{\times\left(\frac{1}{5}\right)} \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.

Donc, $(\mathfrak{D})$ n'est pas perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

2) Prouvons que $(\mathfrak{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.

$\vec{u}\,.\vec{n} = (-1)(4) + (2)(1) + (1)(5) = 3$

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux.

Donc, $(\mathfrak{D})$ est sécant à $(\mathcal{P})$.

Remarque :

Prouvons que$(\mathfrak{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants mais pas perpendiculaires en calculant l'angle entre le plan et la droite.

$\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{n}\|}$

$|\vec{u}.\vec{n}| = 3$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (5)^2} = \sqrt{16 + 1 + 25} = \sqrt{42}$

$\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{6} \times \sqrt{42}} = \dfrac{3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \sqrt{7}} = \dfrac{3}{6 \times \sqrt{7}} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2 \times 7} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$

$\alpha = \arcsin\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

$\alpha \approx 11°$ au degree près

Donc, $(\mathfrak{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants mais pas perpendiculaires.

3) Déterminons les coordonnées de leur point d'intersection A.

Soit t un réel. Soit le point $M\begin{pmatrix} 2 - t \\ 1 + 2t \\ t \end{pmatrix}$. $M \in (\mathfrak{D})$.

$M \in (\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow 4(2 - t) + (1 + 2t) + 5(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow 12 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = -4.$

$A\begin{pmatrix} 2 - (-4) \\ 1 + 2(-4) \\ (-4) \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-7} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$.

Solution de l’exercice 2

a) 2) $A(-3; 0; 1)$ 3) $A \in (\mathcal{P})$ 4) $(\mathfrak{D})$ est incluse dans $(\mathcal{P})$.
b) 3) $A(3; -2; 1)$.
c) 2) $A(-2; 4; 2)$.
d) 2) $A(2; 1; 1)$ 3) $A \notin (\mathcal{P})$ 4) $(\mathfrak{D})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$.

12.Géométrie analytique dans l’espace – Maturita 2018

Exercice 1

Exercice n° 2
(sur 4,5 points)

L´espace est muni d´un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ d'unité graphique 5 cm.
Soient les trois points $A(5;5;0)$, $B(1;7;0)$ et $C(7;0;1)$ qui forment un plan.

1) Justifier que le vecteur $\vec{n}(1;2;8)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
2) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
3) Les points A, B, C et O, l´origine du repère, sont-ils coplanaires ?
4) On considère la droite $(\mathcal{D})$ passant par O et perpendiculaire au plan (ABC).
   Donner une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$.
5) Prouver que le point d’intersection K de la droite $(\mathcal{D})$ et du plan (ABC) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{23};\frac{10}{23};\frac{40}{23}\right)$.
6) Calculer la longueur OK.
7) Démontrer que le point $H\left(\frac{43}{5};\frac{16}{5};0\right)$ est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
8) Justifier que l’aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{69}$.
9) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ en unités de volume et ensuite en cm^3.
   On rappelle que le volume du tétraèdre est $\mathcal{V}=\frac{\mathcal{B}\,h}{3}$ où $\mathcal{B}$ est l’aire d‘une base du tétraèdre et h la hauteur du tétraèdre s’appuyant sur cette base.

Exercice 2

Exercice n° 2
(sur 3,75 points)

Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormal direct de l´espace.
On considère les points $A(2;4;1)$, $B(0;4;-3)$, $C(3;1;-3)$, $D(1;0;-2)$, $E(3;2;-1)$ et $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1) $2x+2y-z-11=0$ est une équation du plan (ABC).
2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4) $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (CD).
5) Le point I est sur la droite (AB).

Exercice 3

Exercice n° 2
(sur 4,5 points)

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$ et $C(-1;1;1)$.

1)
   a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
   c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.
   a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Soient $(\mathcal{P}_1)$ le plan d'équation $3x+y-2z+3=0$ et $(\mathcal{P}_2)$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x-2z+6=0$.
   a. Démontrer que le plan $(\mathcal{P}_2)$ a pour équation $x=2z$.
   b. Démontrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants.
   c. Soit la droite $(\mathcal{D})$ dont un système d'équations paramétriques est
   $$\begin{cases}x=2t\\y=-4t-3\\z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$
   Démontrer que $(\mathcal{D})$ est l'intersection des plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

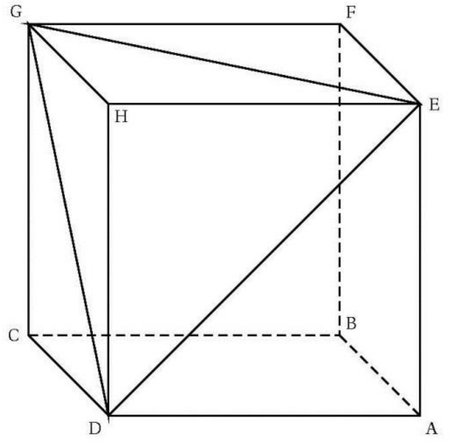
4) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

13.Géométrie analytique dans l'espace – Maturita 2017

Exercice 1

Exercice n° 2
(sur 3,75 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.



On se place dans le repère orthonormé direct $\left(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}\right)$.
Dans ce repère, on a: $B(0;0;0)$, $D(1;1;0)$, $E(0;1;1)$, $G(1;0;1)$, $H(1;1;1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
   Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.
5. Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.

Exercice 2

Exercice n° 2
(sur 4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1\,;2\,;3)$, $B(\,0\,;1\,;4)$, $C(-1\,;-3\,;\,2)$, $D\,(4\,;-2\,;\,5)$ et le vecteur $\vec{n}(2;-1;1)$.

1.
   a. Démontrer que les points A, B, et C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC).
   c. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
   Montrer que le point D appartient à la droite (Δ).
   Justifier que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).
3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). Calculer ses coordonnées.
   Calculer la distance de D au plan (ABC).
4. Calculer l'aire du triangle ABC et puis le volume du tétraèdre $ABCD$.
   On rappelle que le volume du tétraèdre est $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B}\,h}{3}$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur du tétraèdre s'appuyant sur cette base.

Exercice 3

Exercice n° 2
(sur 4,5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points $A(-2\ ; -5\ ; 4)$, $B\ (-2\ ; -3\ ; 4)$, $C(-2\ ; -5\ ; 0)$ et $D(1\ ; -2\ ; 4)$.

1.
   a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).
   b) En déduire que les points A, B, C et D sont non coplanaires.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) parallèle à (ACD) passant par B.

3.
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) perpendiculaire au plan (ACD) passant par B.
   b) Calculer les coordonnées du point d'intersection K de (Δ) et (ACD).

4. En déduire la distance du point B au plan (ACD) <u>en cm</u>.

5. Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
En déduire la nature du triangle ACD et calculer son aire en cm^2.

6. En utilisant les résultats précédents, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ en cm^3.
On rappelle que le volume du tétraèdre est $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B}\,h}{3}$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur du tétraèdre s'appuyant sur cette base.

Exercice 4

Exercice n° 2
(sur 4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on donne les points :
$A(1; 2; 3)$, $B(3; 0; 1)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(2; 1; -1)$, $E(-1; -2; 3)$ et $F(-2; -3; 4)$.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.
Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment $[BC]$.
Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.